

1. INTRODUZIONE
3. RICHIAMO DI GEOMETRIA
5. PUNTI SU \mathbb{R}^n / METODO DI GAUSS
6. PROGRAMMAZIONE MATEMATICA / MINIMO / COMBINAZIONE CONVESSA
7. INSIEME - FUNZIONE CONVESSA
8. PROGRAMMAZIONE CONVESSA
10. FUNZIONE CONVESSA LINEARE (P.L.) / TEOREMI DI MINKOWSKI - WEIL / VERTICE
11. DIREZIONE ESTREMA
13. METODO GEOMETRICO DI SOLUZIONE
14. PROGRAMMAZIONE LINEARE IN FORMA STANDARD
17. SOLUZIONE BASE AMMISSIBILE
20. CONDIZIONE DI OTTIMO
23. ALGORITMO DEL SIMPLESSO
26. CAMBIAMENTO DI BASE
28. MATRICE CARRY
31. FORMULAZIONI DI P.L. / MISCELAZIONE
32. ALLOCAZIONE DI RISORSE
33. METODO DELLE DUE FASI
37. PROBLEMI DEI TRASPORTI
38. CONVERGENZA E DEGENERAZIONE / REGOLA ANTICICLO DI BLANDT
39. PROBLEMI DI TAGLIO OTTIMO
41. TEORIA DELLA DUALITA'
42. PROBLEMA DUALE
44. GAP DI DUALITA' / PROPRIETA' FONDAMENTALI
45. DUALITA' DEBOLE / CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITA'

47. DUALITA' FORTE
48. TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE / CONDIZIONI DI ORTOGONALITA'
49. ANALISI DELLA SENSIBILITA'
55. PROGRAMMAZIONE NON LINEARE / RICHIAMI DI ANALISI
57. MATRICE DEFINITA POSITIVA/NEGATIVA / FUNZIONE CONVESSA/SVILUPPO IN SERIE
58. CONDIZIONE NECESSARIA DEL 1° ORDINE
60. CONDIZIONE NECESSARIA-SUFFICIENTE DEL 2° ORDINE / ALGORITMO DI DISCESA (LINE SEARCH)
61. CONDIZIONI DI ESISTENZA DI UN MINIMO GLOBALE / CONDIZIONE D'ANGOLO / METODO DEL GRADIENTE / CONDIZIONE DI SUFFICIENTE RIDUZIONE
62. CONDIZIONE DI WOLFE
63. METODO DI ARMISO (BACKTRACKING)
64. METODO DI BISEZIONE
65. CONVERGENZA GLOBALE-LOCALE / RAPIDITA' DI CONVERGENZA
66. METODO DELLA INTERPOLAZIONE
69. METODO DI NEWTON PURO
70. METODO DI NEWTON MODIFICATO
71. PROGRAMMAZIONE NON LINEARE VINCOLATA
73. VINCOLO ATTIVO / CONDIZIONI KKT (KARUSH KUHN TUCKER)
77. ALGORITMI PER PNL VINCOLATA / FUNZIONI DI PENALITA'
78. FUNZIONI DI BARRIERA
79. ESERCIZI
80. ESERCIZI

Dario Paciarelli - paciarelli@uniroma3.it

paciarelli - via. uniroma3.it | COFSI | Ric-Op | UelCorne.html

Nasce nel '47 - aviation USA, DSO7111. Nasce il problema di

PROGRAMMARE LINEARE delle attività usando strumenti

ISTINTIVO. $\rightarrow \lambda_1 a + \lambda_2 b$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (si usano

solo come. lineare). Problema di programmare

la realtà e attuarlo matematicamente, costruito

il modello, il PC lo risolve.

Indovinello della Pina: "10 anni fa non avevo

meno di 3 volte l'età che allora, allora mia

sorella. Oggi non ho più del doppio della

mia età". Quanti anni ho al max? \rightarrow e

proble. di OTTIMIZZAZIONE, dello farlo diventare

oggetto ISTINTIVO con INCOGNITE (VARIABILI [di DECISIONE]).

- X_P = età della Pina oggi

- X_S = " " sorella "

\downarrow
Definire e' la
cosa + importante

\exists i VINCOLI e la FUNZIONE OBIETTIVO

\rightarrow f.o: $\max \{ X_P \}$

\rightarrow vincoli: $\begin{cases} X_P - 10 \geq 3 \cdot (X_S - 10) \\ X_P \leq 2 \cdot X_S \end{cases}$

(lineari, $\begin{cases} X_P \geq 10 \\ X_S \geq 10 \end{cases}$

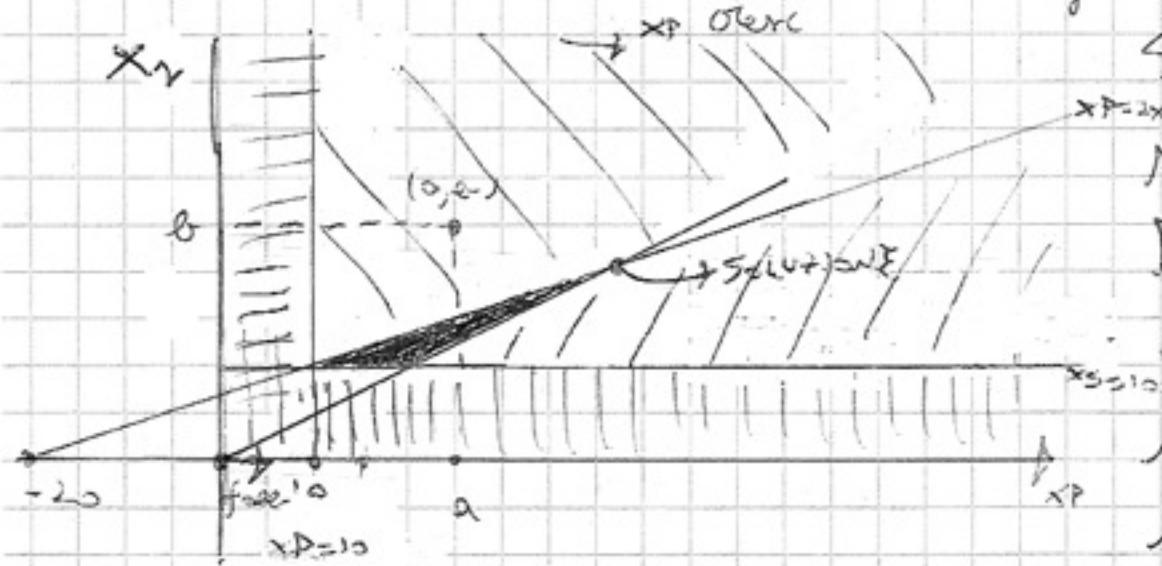
non negative)

di variabili)

Problema non e' UNIVOCO (ex sepleto X_P di 10
anni fa)

La soluzione è ottenuta con algoritmi x trasformare modello matematico: ALGORITMO DEL SIMPLESSO
 Si usa il METODO delle CINQUE FASI:

- 1) RACCOLTA DEI DATI
 - 2) IDENTIFICAZIONE PROBLEMA
 - 3) COSTRUZIONE MODELLO MATEMATICO
 - 4) SOLUZIONE
 - 5) VERIFICA
- } del decisore
 } del ricercatore operativo
 } del decisore
- (se non va bene ho info. in +, il motivo del "no")
- Problema con 2 var. risolubile graficamente.



Si eliminano le sol. non ammissibili
 Retta $x_1 = 10$ e $x_2 = 10$
 e escluso i valori
 prima. Poi $x_1 = 2x_2$,
 prendo $(10,0)$, non

ammissibile quindi tutto il semipiano a dx della
 (basta vedere 1 punto di 1 semipiano)

- $x_1 + 3x_2 \leq 20$, con $(0,0)$, ammissibile + cancello
 parte sopra. Ho trovato l'insieme ammissibile
 la f. obiettivo mi dice di spostarmi verso x_1 crescente
 $\max 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$; soluzione è intersezione delle
 2 rette $x_1 = 2x_2$ e $-x_1 + 3x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = 20$, $x_1 = 40$
 (sol. ottima è SEMPRE nel vertice; se ho n
 (2) Variabili corratt. algebricam. il poliedro)

Conosciamo:

x = vettore delle variabili: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ (sempre colonna, x verifica insieme la transposta)

Matrice è σ insieme di elementi:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & \dots & l_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{31} & \dots & l_{33} \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ l_3^T \end{pmatrix}$$

σ collezione di colonne σ di righe (lettera minuscola x indicare vettore)

Se $\det A \neq 0$, ho $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$G = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \rightarrow \text{non lo useremo}$

Useremo METODO DI GAUSS:

$\begin{cases} 2x_1 = y_1 \\ x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} y_1 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \rightarrow \text{Matrice inversa} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sum_{i=1}^3 x_i y_i$ è la def. di PRODOTTO SCALARE

2/10/07

$$[\det A \neq 0] \Leftrightarrow \left[\sum_{j=1}^m \lambda_j A_j = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = 0 \forall i = 1 \dots m \right]$$

$[A_1 \dots A_j \dots A_m] \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'inversa: $Ax = y \Rightarrow x = A^{-1}y$

$$\boxed{A} \boxed{I} \Rightarrow \boxed{I} \boxed{A^{-1}}$$

Comb. lineare di righe

Ex: Voglio l'inversa matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \\ 3x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricavo x_1 e la sostituisco: (trasferisco colonna 1 matrice nella colonna 1 di quella identità)

$$2x_3 + x_1 = y_1 - 2x_3$$

$$\begin{array}{l} 2y_1 - 4x_3 + x_2 = y_2 - 2y_1 - 2x_3 \\ 3x_2 + x_3 = y_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \text{operazione di PIVOT: colonna 1 nella J e riga di P. Nell'elemento ij}$$

Ricavo x_2 da 2° eq.

Pivot su a_{22}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot su a_{33}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{13} & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6/13 & -3/13 & 1/13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6/13 & -3/13 & 1/13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/13 & 6/13 & -2/13 \\ 0 & 1 & 0 & 6/13 & -3/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 1 & 6/13 & -3/13 & 1/13 \end{bmatrix}$$

Rimane 2 riga:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \end{array} \right] \rightarrow A^{-1}$$

PIVOT SU a_{ij} [trasformo A_j in I_i]

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{elemento} \\ \text{su} \\ \text{PIVOT} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{riga su} \\ \text{PIVOT} \end{array}$$

↑
colonna su
PIVOT

1. $\bar{a}_i^T = \frac{1}{a_{ij}} a_i^T$ (divido $\times a_{ij}$ tutta la riga)

2. Per $h=1 \dots m, h \neq i$

$$\bar{a}_h^T = a_h^T - \frac{a_{hj} a_{ij}^T}{a_{ij}}$$

METODO DI GAUSS: per $i=1 \dots m$ pivot su a_{ij}

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{pivot su } a_{33}=2]{\text{pivot su}} \bar{A} \quad ; \quad \frac{a_{13}}{a_{33}} = -\frac{1}{2}, \frac{a_{23}}{a_{33}} = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \text{ e nome} \\ 1. \end{array}$$

Ex: $\min 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Problema è in forma standard
se tutte le variabili sono ≥ 0
e tutti gli altri vincoli
sono di uguaglianza.

$$\min C^T x \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

No sol. grafica, metodo
algebrico x identificare vertice.

Problema di PROGRAMMATIONE MATEMATICA è $\min f(x)$

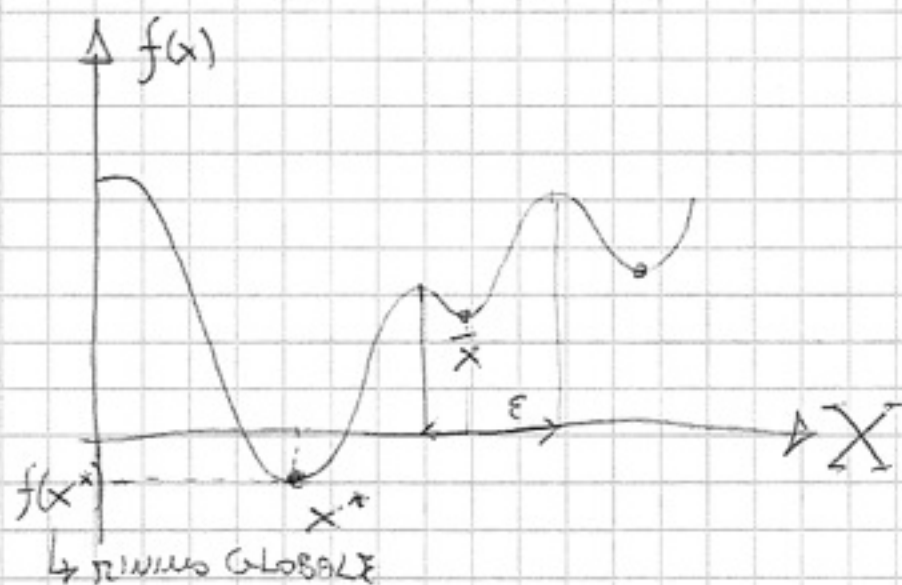
Cerchiamo minimo GLOBALE definito come x^* : $x \in X$

Se $\forall y \in X \Rightarrow f(y) \geq f(x^*)$

Se $f(y) > f(x^*) \forall y \in X - \{x^*\} \Rightarrow x^*$ punto di minimo
globale STRETO

Def: \bar{x} : punto di min. LOCALE se $\exists \epsilon > 0$:

Se $\forall y \in X, \|\bar{x} - y\| < \epsilon \Rightarrow f(y) \geq f(\bar{x})$



Spesso hanno limitati
ai minimi locali.

COMBINAZIONE CONVESSA

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = z$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

z : comb.
lineare di x, y

Se $\lambda_1 \geq 0$

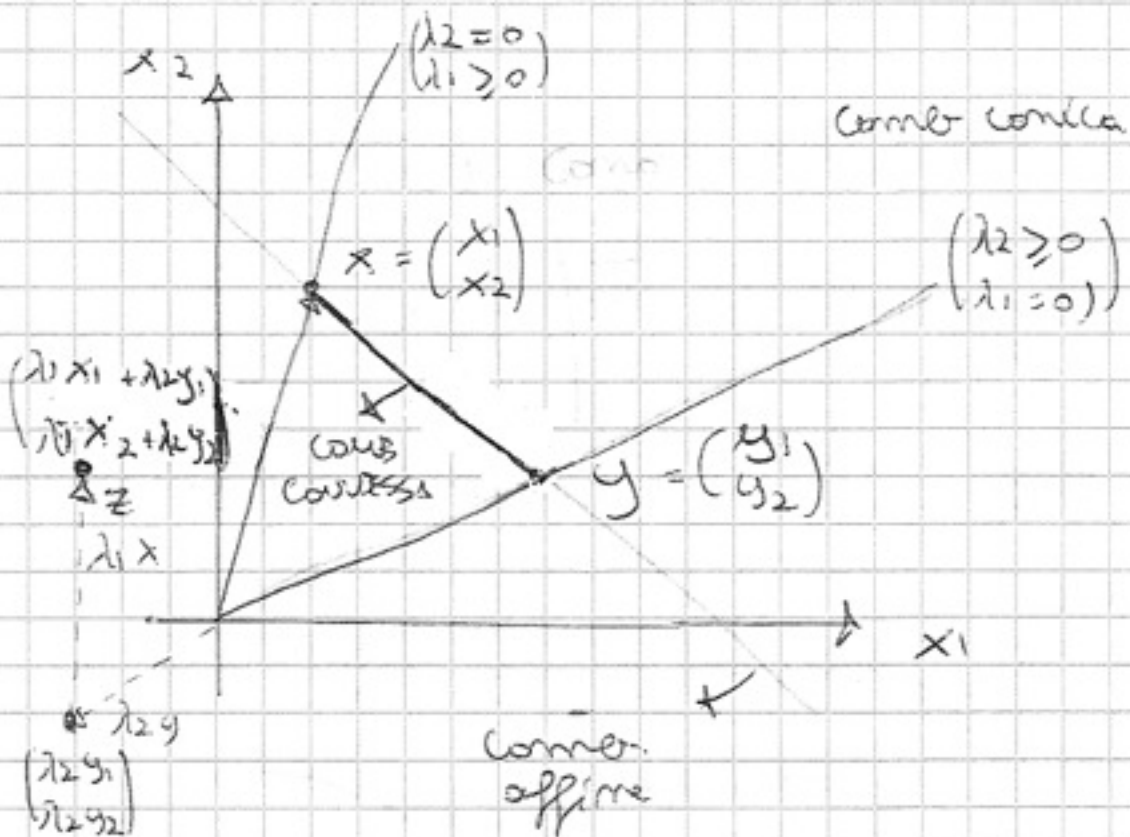
$\lambda_2 \geq 0$

$\Rightarrow z$: combinazione
CONVEXA di x e y

Se $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow z$: combinazione
AFFINE di x e y

Se affine + conica $\Rightarrow z$: comb. CONVESSA

(6)



Semi-diretta: estremi
estreme del cono

Corno convessa:

$$Z = \lambda x + (1-\lambda)y$$

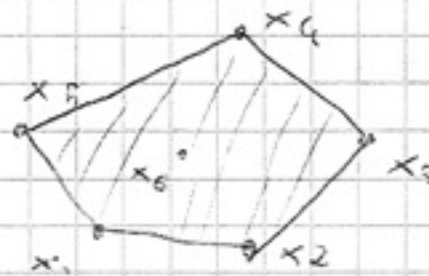
$$\lambda \in [0, 1]$$

Se $\lambda \in (0, 1)$ corno
STRETTA

Si possono corno + punti

$$Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \begin{matrix} \lambda_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{matrix}$$

$x_1 \dots x_n$

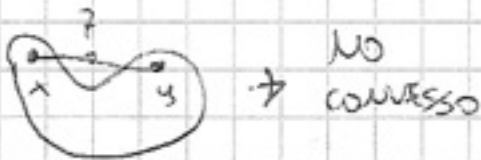


INSIEME CONVESSO

X convesso se $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow$

$$Z = \lambda x + (1-\lambda)y \in X$$

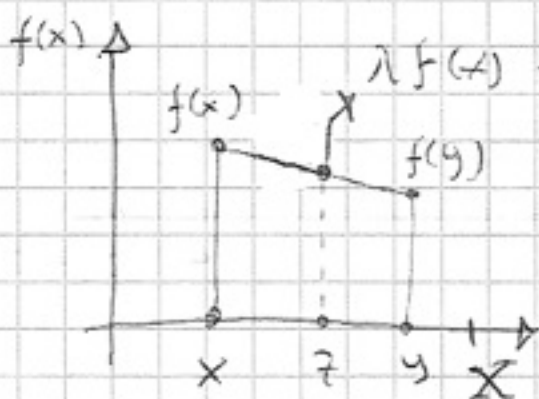
(segmento che congiunge
2 punti e sempre contenuto
nell'insieme)



FUNZIONE CONVESSA

$f(x)$ convessa su X convesso se $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$Z = \lambda x + (1-\lambda)y \Rightarrow f(Z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$



$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \rightarrow f(Z)$ al di sotto di quel
punto e tutta la funzione al
di sotto del segmento: SI



PROGRAMMATION CONVEXA

$\min f(x)$ e $x \in X \rightarrow$ qui si min globale.

Th: in un prob. di prog. convessa \bar{x} e' anche x^*

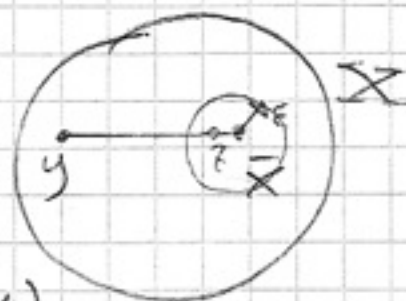
Dim:

- Hp: $\bar{x} \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : \forall z \in X, \|z - \bar{x}\| < \epsilon \Rightarrow f(z) \geq f(\bar{x})$

- Hp: X conv, $f(x)$ conv.

Tesi: \bar{x} e' anche $x^* \rightarrow \forall y \in X \Rightarrow f(y) \geq f(\bar{x})$

Prendo convergente $y \in X$ e prendo come lineare z suff. vicino a \bar{x} .



Dato $y \in X$ qualsiasi, $\exists z = \lambda \bar{x} + (1-\lambda)y$ tale che $\|z - \bar{x}\| < \epsilon$ (scego λ quasi = a 1).

$$\underline{f(z) \geq f(\bar{x})}$$

Essendo la f convessa, so che $f(z) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(y)$ ma confrontando ho $(1-\lambda)f(\bar{x}) \leq (1-\lambda)f(y)$

$$[\lambda > 0] \quad \text{C.V.D.}$$

ALGORITMO:

1. scego $x^0 \in X$, 2. se $x^i \in \bar{x}$ stop ($x^i = x^*$)

altrimenti trovo una direzione di discesa di

Trovo $x^{i+1} = x^i + \lambda_i d_i$ [$\lambda_i = \text{passo}$] \rightarrow ripeto 2



TEOREMA 1

$X = \{x \in \mathbb{R}^m : a^T x \geq b\}$ è convesso

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} ; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

Dim:

- Ip: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in X \quad a^T \bar{x} \geq b \quad \text{e} \quad a^T \bar{y} \geq b \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$

- Th: Detto $z = \lambda \bar{x} + (1-\lambda) \bar{y} \Rightarrow a^T z \geq b$

$$a^T z = a^T (\lambda \bar{x} + (1-\lambda) \bar{y}) = \lambda a^T \bar{x} + (1-\lambda) a^T \bar{y} \geq$$

$$\lambda b + (1-\lambda)b = b, \text{ quindi } a^T z \geq b.$$

TEOREMA 2

L'intersezione di 2 o più insiemi convessi è un insieme convesso.

Dim:

- Ip: A, B convessi

- Th: $A \cap B$ è convesso.

Applico la definizione: $\forall x, y \in A \cap B \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in A \cap B \quad (1^*)$

$$\begin{array}{l} x \in A, B \\ y \in A, B \end{array} \rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \begin{array}{l} \nearrow \in A \\ \searrow \in B \end{array} \Rightarrow \text{CVD}$$

Un POLIEDRO è un insieme convesso:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} Ax \geq b \\ Cx = d \end{cases} \right\} \text{ è convesso}$$

(insieme di tutte le x tali che $\begin{cases} Ax \geq b \\ Cx = d \end{cases}$)

FUNZIONE CONVESSA LINEARE

$$f(x) = C^T x \text{ lineare.}$$

Esempio la def. di convessa:

$$f(x) \text{ conv se } \forall x, y \in X, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Nel caso di f conv. lineare:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = C^T (\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda C^T x + (1-\lambda)C^T y$$

Esempio di programmazione lineare:

$$\min C^T x$$

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ Cx = d \end{cases}$$

[forma GENERIC]

$$\min C^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

[forma STANDARD]

→

Il punto di
min locale \equiv
punto di min
globale

THEOREM DI MINKOWSKI-WEIL

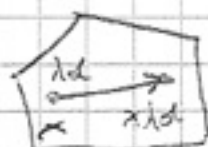
"Un punto di un poliedro è esprimibile come somma di due quantità: di una combinazione convessa dei suoi vertici e di una combinazione conica delle sue direzioni estreme."

Vertice: "Punto E è un vertice se \nexists altri 2 punti F e G nel poliedro / $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ ", ovvia:

$x \in P$ è vertice di P se $\nexists y, z \in P, \lambda \in (0, 1) / x = \lambda y + (1-\lambda)z$

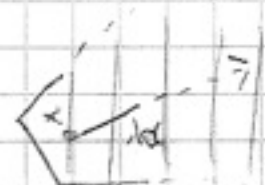
Direzione estrema: Vettore $d \in \mathbb{R}^n$ è direzione di P se $\forall x \in P, \lambda \geq 0 \Rightarrow x + \lambda d \in P$

10

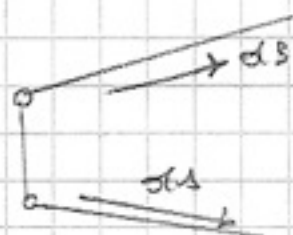


Se $\lambda \leq 1$, $x + \lambda d$ è inferiore del segmento $x + d$.

Se $\lambda > 1$, il punto finale $x + \lambda d$ possono rappresentare distanze ∞ quindi il poliedro dovrebbe estendersi all' ∞ per poter permettere che $x + \lambda d \in P$



d è DIREZIONE ESTREMA di P se \exists direzioni d_1, d_2 di P con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ come conica delle 2 dir. d_1 e d_2



d_1 e d_2 non possono essere espresse come combinazione di 2 direzioni.

La dir. est. è un'estensione di vertice all' ∞ .

Th: Se un problema di PL ha soluzione ottima, ha un vertice ottimo.

Dim:

-Ip: Vertici del poliedro: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ siano tutti vertici di P
Dir. estreme $\{d_1, \dots, d_h\}$ siano le dir. estreme di P

Sia y^* una soluzione ottima del problema

1) Calcolo quanto vale la funzione obiettivo in tutti i vertici.

Sia $C^T y^*$ il valore ottimo, dico x^* il vertice di costo minimo tale che $C^T x^* = \min_{i=1..n} \{C^T x_i\}$

Th: $C^T x^* \leq C^T y^*$

Uno il th. di W.M. $y^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^h \mu_j d_j$ (2*)

$\mu_j \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

Dimostrare che:

1) $\sum_{j=1}^h \mu_j d_j C^T \geq 0$ se $\exists d_j / C^T d_j < 0 \Rightarrow$

$Z = y^* + \mu ds \in P$ (z appartorrebbe al Poliedro)
 ma $C^T z = C^T y^* + \mu \underbrace{C^T ds}_{< 0}$ quindi il problema
 sarebbe illimitato inferiormente perché
 il punto z varrebbe di meno della soluzione ottima
 e questo entra in contraddizione con le ipotesi.
 Calcolare il valore della soluzione ottima (sostituendo
 y^* da 2^*):

$$C^T y^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{C^T x_i}_{\geq C^T x^*} + \sum_{j=1}^m \underbrace{\mu_j (C^T ds)}_{\geq 0}$$

(punto di minimo ottimo)

quindi $C^T y^* \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i C^T x^* = C^T x^* (\sum \lambda_i) = C^T x^*$
 poiché $\sum \lambda_i = 1$

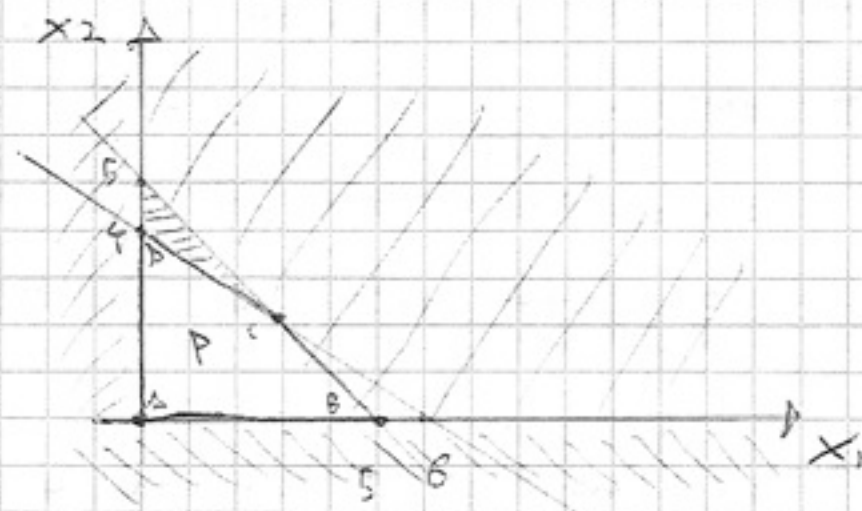
Quindi se y^* è soluzione ottima anche il vertice x^* è
 vertice di ottimo del problema.

Esempio:

$$\min -3x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$



$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha costo $C^T A = 0$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ha costo $C^T C = -9 - 4 = -13$

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha costo $C^T B = -15$; $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ha costo $C^T D = -8$

Trovo $C \begin{cases} 2(5 - x_2) + 3x_2 = 12 \\ x_1 = 5 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 3 \end{cases}$

Con C^T si indicano i COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.

In questo caso $C^T = (c_1, c_2) = (-3, -2)$

(12) Quindi il * di ottimo è B perché C^T è minimo.

METODO GEOMETRICO DI SOLUZIONE

Calcolo $C^T x^0$ in un generico punto x^0 . Mi sposto in un punto $x_1 = x^0 + \Delta x$ dove $x_1 C^T = C^T x^0 + C^T \Delta x$

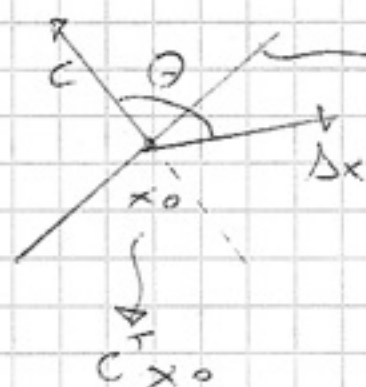
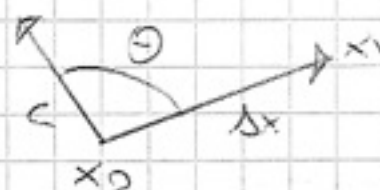
Voglio trovare un punto $x_1 / C^T x_1 < C^T x^0$ quindi $C^T \Delta x < 0$.

Va trovata la direzione di ricerca. Applico a x^0 un vettore C :

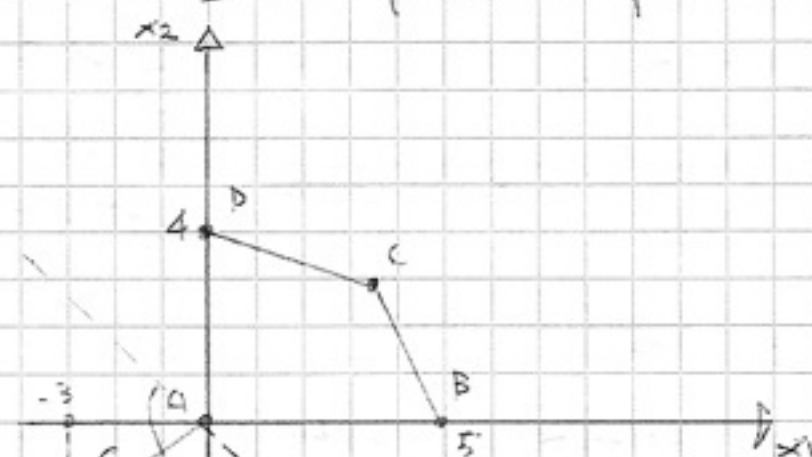
$$C^T \Delta x = |C^T| \cdot |\Delta x| \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta < 90^\circ \Rightarrow |C^T| |\Delta x| \cos \theta > 0$$

$$\cos \theta > 90^\circ \Rightarrow \text{ " " " } < 0$$



tracciato in base al valore di C^T e poi traccio la retta \perp a questa passando per x^0



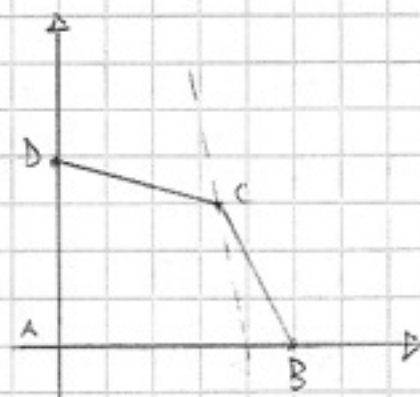
Tutti i punti da questo lato hanno un costo inferiore ad A
A è il punto di costo ottimo

- 1) Scegli A
- 2) Traccio $C(C_1, C_2)$
- 3) Verifico se ci sono vertici con costo inferiore

→ Se si, fine

→ Se no, ricomincio con un altro vertice

Neanche C è punto di minimo, lo è B.



Es: $\min -3x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \end{cases} \quad x \geq 0$$

Ricondurre in forma standard un problema generico:

$$a_i^T x \geq b_i \rightarrow a_i^T x - s_i = b_i \quad \text{con } s_i \geq 0$$

↓ Variabile di scarto

Se sottraggio una quantità positiva al primo membro posso trasformare una disuguaglianza in uguaglianza.

$$a_i^T x \leq b_i \rightarrow a_i^T x + s_i = b_i \quad \text{con } s_i \geq 0$$

Con x_j Variabile libera (può essere sia positiva che negativa) lo sostituisco con una coppia di Variabili non negative.

$$x_j \rightarrow \begin{cases} y_j - z_j + x_j \\ y_j \geq 0; z_j \geq 0 \end{cases}$$

Example:

$$\max \quad 3x_1 - 2x_2$$

$$\min \quad 3x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \text{ libera} \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - s_1 = 4 \\ x_1 - x_2 + s_2 = 2 \\ x_1 \text{ libera} \\ s_1, s_2, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Sostituisco $x_1 = y_1 - z_1$ dove y_1 e z_1 sono > 0 , diventa:

$$\begin{cases} 3(y_1 - z_1) + x_2 - s_1 = 4 \\ (y_1 - z_1) - x_2 + s_2 = 2 \\ s_1, s_2, x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ipotesiamo che la soluzione ottima sia:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow y_1 - z_1 = 1$

B base di A ($m \times k$) $m < k$ (altrimenti soluzione
triviale)

$B = [A_{i_1} \ A_{i_2} \ \dots \ A_{i_k}]$ Se $A_{i_1} \dots A_{i_k}$ sono lin.
indipend. e aggiungiamo $A_j \Rightarrow$
lin. dipendenti

la dimensione della base è detta RANGO (tutte le
base di una matrice hanno stessa dimensione).

Se Rango $A = m \Rightarrow$ Rango max, tutte le righe della
matrice sono linearmente indipendenti.

SOLUZIONE BASE

$A = [B \ F]$
in base \swarrow fuori base \searrow

Es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se scelgo come base di $A \Rightarrow$

$$B = A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ come } \det \neq 0$$

allora F sarà $F = [A_2 \ A_4 \ A_5 \ A_6] =$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poiché il problema è $\min C^T x$: $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \sum_{j=1}^m A_j x_j = b$

quindi $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $x_F = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$, posso riscrivere:

$$\min (C_B^T \ C_F^T) \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} [B \ F] \begin{pmatrix} x_B \\ x_F \end{pmatrix} = b \\ x_B \geq 0 \\ x_F \geq 0 \end{cases} \rightarrow B x_B + F x_F = b$$

posso ricavare

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} F x_F$$

$m = \text{Variabili}$; $k = \text{Equazioni}$

Fino arbitrariamente x_F e $\det X_B$. Quindi posso scegliere di porre $x_F = 0$, ottengo:

$$x_B = B^{-1}b \rightarrow \text{particolare soluzione ammissibile solo se } B^{-1}b \geq 0$$

Questa soluzione con costruita viene detta SOLUZIONE BASE AMMISSIBILE, in corrispondenza dei vertici del poliedro.

Dall'ex. se $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ottengo $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

quindi $x_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Th: In un poliedro in forma standard

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0 \right\}$$

\bar{x} è Vertice di $P \Leftrightarrow \bar{x}$ è SBA

Soluzione Base Ammissibile

\exists base B di A :

$$x_B = B^{-1}b ; x_F = 0$$

Dim: \bar{x} Vertice $\Rightarrow \bar{x}$ è SBA, $\forall y, \lambda \in P, \lambda \in (0,1), \bar{x} = \lambda y + (1-\lambda)\bar{x}$

Se \bar{x} è Vertice di P ,

Ip: \bar{x} non è SBA n. dimostra il contrario per Contraddizione.

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ Variabili in Base (non possono essere var. fuori base)
 \downarrow rivediamo le variabili

Se \bar{x} non SBA allora $A_1 \dots A_k$ devono essere linearmente dipendenti.

Def: LINEARMENTE DIPENDENTI: $\exists \alpha_1 \dots \alpha_k : \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
(da 1*) (17)

Ottengo dalla somma $\sum_{i=1}^n A_i (\underbrace{y_i - z_i}_{y \neq z}) = 0$

Ho dimostrato che le righe delle matrici sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \bar{x}$ non può essere una soluzione base ammissibile.

Th: In un problema di programmazione lineare in forma standard se $\exists \bar{x} \in SBA$ ottima.

Ex: $\min 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

Possibili basi:

$$B^1 = [A_1 A_2], B^2 = [A_1 A_3], B^3 = [A_2 A_3] \quad A_1 \text{ e } A_4 \text{ non}$$

$$B^4 = [A_2 A_4], B^5 = [A_3 A_4]$$

\rightarrow sono lin.
NON le posso scegliere come base \leftarrow indipendenti

Se A fosse $A(m \times n) \Rightarrow \binom{n}{m}$ combinazioni $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

Bisogna verificare che la soluzione non sia illimitata.

Non è neff. vedere la base di costo min.

1: Scegli 1 base, calcolo il costo

2: Mi sposto verso una base di costo inferiore dopo aver individuato una direzione di discesa.

Una base è ottima se:

$$\min C_B^T x_B + C_F^T x_F$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b - B^{-1} F x_F & x_B = B^{-1} b \geq 0 \\ x_B \geq 0 & x_F = 0 \\ x_F \geq 0 \end{cases}$$

Sostituendo x_B nella sol. obiettivo:

$$\min C_B^T B^{-1} b + (-C_B^T B^{-1} F + C_F^T) x_F$$

Il costo è $C_B^T B^{-1} b$ (se $x_F = 0$)

In una qualsiasi sol. ammissibile $x_F \geq 0$, se si ha

$\bar{C}_F^T = -C_B^T B^{-1} F + C_F^T$ Vettore dei costi ridotti, il
costo è $C_B^T B^{-1} b + \bar{C}_F^T x_F$

CONDIZIONE DI OTTIMO

Se $\bar{C}_F^T \geq 0 \Rightarrow$ SBA ottima (cond. suff.)

Se $\bar{C}_F^T < 0 \Rightarrow \exists \bar{C}_j < 0$

Esempio:

$$B^{-1} = [A_1, A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i costi ridotti della variabile fuori base:

$$\bar{C}_F^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}}_{C_F^T} - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}}_{C_B^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{B^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_F = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore non
è ottimo che
tutte le com-
ponenti devono essere ≥ 0 .

Poiché $\bar{c}_4 < 0$, se x_4 aumenta la f obiettivo diminuisce
Scegliere una base in cui ci sia x_4 .

8/10/07

$$\min C^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow Bx_B + Fx_F = b \rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}F x_F$$

B base di A (soluzione base ammissibile quindi
 $x_B = B^{-1}b \geq 0$; $x_F = 0$)

Sostituendo x_B nella f obiettivo:

$$\min C^T x = C^T B^{-1}b - \underbrace{(C_F^T - C_B^T B^{-1}F)}_{\text{COSTI RIDOTTI}} x_F$$

$$\text{COSTI RIDOTTI: } \bar{c}_F^T = C_F^T - C_B^T B^{-1}F$$

$$\text{Vettore riga: } u^T = u_1 \dots u_m$$

Data x_j fuori base:

$$\bar{c}_j = c_j - u^T A_j \text{ (colonna della matrice } A)$$

$$u^T = C_B^T B^{-1}$$

Se $\bar{c}_j \geq 0 \Rightarrow$ la soluzione B è ottima ($\forall x_j$ fuori-base)

Se $\exists x_j$ fuori base: $\bar{c}_j < 0$

$$C^T x = C_B^T B^{-1}b = \sum_{j \in B} \bar{c}_j x_j \quad \text{allora}$$

mantengo tutte le variabili fuori base x_i pari a 0 tranne x_j .

Cambiando x_j , cambia il sistema.

$$\text{Se chiamo } \bar{b} = B^{-1}b, \bar{A}_j = B^{-1}A_j \text{ e } x_B = \bar{b} - \bar{A}_j x_j$$

Dello variare x_j ma in modo tale che x_B sia sempre ammissibile e questo è vero se $x \geq 0$ (2)

quindi risulta $\bar{b} - A_j x_j \geq 0$

Devo trovare il max. valore di x_j quindi

$$\max x_j = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0 \right\}$$

Spiegazione:

$$\begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_i \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} x_j ; \bar{b} \geq A_j x_j$$

Se $a_{ij} < 0$ la disuguaglianza è sempre verificata essendo $\bar{b}_i > 0$ quindi $x_j \leq \bar{b}_i / a_{ij}$ solo per $a_{ij} > 0$.

È una riga in cui max di x_j è / da avere lo stesso valore su due lati della disuguaglianza.

$t = \argmin \left\{ \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}} : a_{ij} > 0 \right\}$ → funzione che fornisce il massimo valore di $\bar{b}_i \times a_{ij}$ e' valida $a_{ij} > 0$

$$x_B = \bar{b} - A_j x_j$$
$$x_{B[t]} = \bar{b}_t - \frac{\bar{b}_t}{a_{tj}} \frac{a_{tj}}{a_{tj}} = 0$$

Esce dalla base la t -esima colonna che viene sostituita con la colonna A_j .

Se tutte le $a_{ij} \leq 0$ allora $x_j \rightarrow +\infty$, $C_j < 0$ trovo soluzioni ammissibili all' $\infty \Rightarrow$ il problema è ILLIMITATO INFERIORMENTE.

ALGORITMO DEL SIMPLESSO

(22)

(→)

1. Se $\forall x_j$ fuori base, ha $\bar{c}_j \geq 0 \Rightarrow B$ ottima
2. Se $\exists x_j$ " " " $\bar{c}_j < 0 \Rightarrow$ entro in base A_j
3. Se $\bar{A}_j = B^{-1} A_j$, $\bar{A}_j \leq 0 \Rightarrow$ problema illim. infer.
4. $t = \arg\min_{\bar{a}_{ij}} \{ \bar{a}_{ij} : \bar{a}_{ij} > 0 \}$ esce la t -esima var. in base

Ricomincio con la nuova matrice

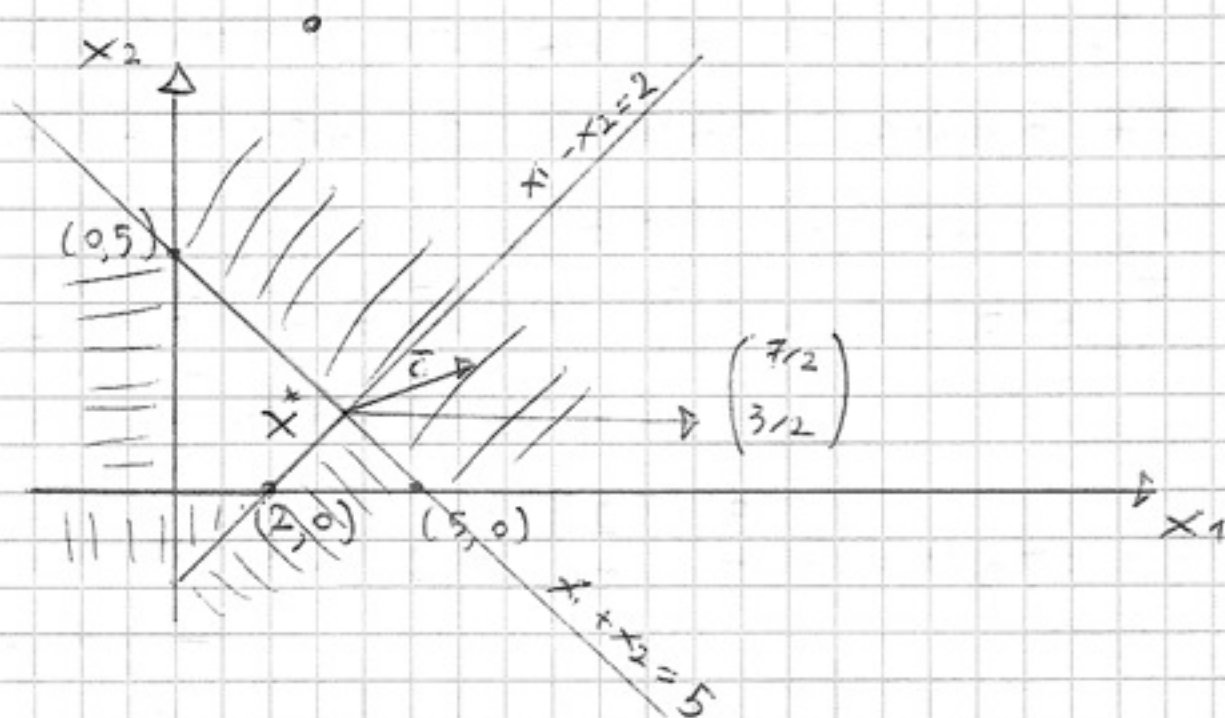
Es:

$$\max 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$



Vettore costi:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow z$$

1. Riporto il sistema in forma standard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

2. Scelgo una base ammissibile della matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = (A_3 A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. S.B.A.

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Infatti } (x_1, x_2) = (0, 0) \text{ è uno dei vertici del poliedro}$$

4. Verifico che sia una SBA

- Calcolo $u^T = C_B^T B^{-1} = (C_3 \ C_4) B^{-1} = (0 \ 0)$
 \hookrightarrow costi della var. di base

- Costo ridotto della variabile fuori base:

$$\bar{C}_1 = C_1 - u^T A_1 = -2 - (0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

\hookrightarrow colonna 1 della matrice A

la cond. di ottimalità non è verificata \Rightarrow entra in base A_1

Per questa base la f. obiettivo vale 0 essendo x_1 e x_2 pari a $(0, 0)$.

$$\bar{A}_1 = B^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

\downarrow
Vettore dei termini noti

$$t = \arg\min \left\{ \frac{5}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 2 \rightarrow \text{il minimo dei 2 num.}$$

$\equiv 2^{\circ}$ elemento (ARG, non MIN)

Esce A_4 dalla base $B = (A_3 \ A_4)$ e diventa

$$B = (A_3 \ A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcolo l' inversa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1} \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ci troviamo nel punto $x_1 = 2, x_2 = 0$ che è un vertice del poliedro. Bisogna verificare se è nel. ottima:

$$u^T = C_B^T B^{-1} = (C_3 \ C_1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ -2)$$

$$\bar{C}_4 = 0 - (0 \ -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$\bar{C}_2 = -1 - (0 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -3 < 0$$

$\hookrightarrow A_2$

(24) Entra in base la colonna 2 \Rightarrow solo det. la

colonna de exe:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo la variabile uscente:

$$t = \arg\min \left\{ \frac{3}{2}, \textcircled{0} \right\} = 1$$

Valore < 0 , quindi la riga 2 non può essere considerata
il minimo si ottiene x la riga 1

Per la 1° colonna in base (quindi A_3 e non A_1)

$$B = (A_2 \ A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

$$x_F = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione corrisponde al vertice $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{3}{2}$.

Verifico che sia soluzione ottima:

$$u^T = (C^T B^{-1}) = (C_{x_2} \ C_{x_1}) (B^{-1}) = (-1 \ -2) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(\rightarrow)

$$\bar{C}_3 = \underbrace{0}_{C_3} - \left(\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_3} = \frac{3}{2} > 0$$

$$\bar{C}_4 = \underbrace{0}_{C_4} - \left(-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_4} = \frac{1}{2} > 0$$

x^* la soluzione ottima

CAMBIO DI BASE

la base corrente si ottiene scegliendo m colonne della matrice A in ordine generico:

$$B = [A_{B[1]} \quad A_{B[2]} \quad \dots \quad A_{B[t]} \quad \dots \quad A_{B[m]}]$$

Si può passare alla base \tilde{B} avente uguali a B tutte le colonne tranne la colonna t :

$$\tilde{B} = [A_{B[1]} \quad A_{B[2]} \quad \dots \quad A_{[t]} \quad \dots \quad A_{B[m]}]$$

Come posso sapere se questa è effettivamente una base?

Devo calcolare $B^{-1} \cdot \tilde{B}$

$$B^{-1} \cdot \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{t}{a_{1s}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ a_{ms} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ts} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix}$$

$$\det [B^{-1} \quad \tilde{B}] = \underbrace{\bar{a}_{t5}}_{\leftarrow \text{pivot}} \geq 0$$

Quindi tutte e 2 le matrici sono non singolari e quindi $\det \tilde{B} \neq 0$.

$\tilde{B} b \geq 0$ sempre vero per come scelto t .

Si ottiene infatti $x_B - \bar{A}_5 x_5 \geq 0 \Rightarrow x_{\tilde{B}} \geq 0$

Se chiamo la matrice $Q = B^{-1} \cdot \tilde{B}$ ottengo

$$\tilde{B} = B \cdot Q \quad \text{quindi} \quad \tilde{B}^{-1} = \underbrace{Q^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{le devo invertire} \\ \times \text{ fare l'inversa}}} \cdot B^{-1}$$

↓
l'inversa su Q si ottiene facendo PIVOT sull'elemento \bar{a}_{t5} :

Pivot su

\bar{a}_{t5}

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_5 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

↓

$$I \begin{pmatrix} \tilde{B}^{-1} \end{pmatrix}$$

→ ottengo l'inversa di B in questo modo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = [A_3 \ A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrata A_1 ed esce A_4 :

$$\tilde{B} = [A_3 \ A_1]$$

Voglio calcolare \tilde{B}^{-1}

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \textcircled{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Pivot

Entro A_2 , esce A_3 ($t=1$)

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \textcircled{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Possiamo calcolare anche $-\bar{u}^T$ e \bar{b} direttamente in questa fase.

MATRICE CARRY

Da matrice base
otteniamo con
una riga e una
colonna.

Riga 0

$$\begin{array}{c|c} -u^T & -z = -CB^T B^{-1} b \\ \hline B^{-1} & \bar{b} \end{array}$$

Aggiornamento Carry:

$$\begin{array}{c|c|c} \bar{C}_j & -u^T & -z \\ \hline \bar{A}_j & B^{-1} & \bar{b} \end{array}$$

Pivot m \bar{a}_{tj}

Otengo:

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & -\tilde{u}^T & -\tilde{z} \\ \hline \vdots & \tilde{B}^{-1} & \tilde{b} \\ \hline \textcircled{28} \text{ riga } t & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \vdots \end{array}$$

Algoritmo del Simplex

3/10/07

- Fase 1. Dimostra che il poliedro $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ è vuoto oppure elimina eventuali equazioni ridondanti e trova una base ammissibile.

Imposta la matrice CARRY

- Fase 2.

$$\begin{array}{c|c} -u^T & -z \\ \hline B^{-1} & \bar{b} = B^{-1}b \end{array}$$

Calcola i costi ridotti delle Variabili fuori base: $\bar{c}_j = c_j - u^T A_j$
Se $\bar{c} \geq 0 \rightarrow \text{STOP}$, soluzione ottima
($x_B = \bar{b}$, $x_F = 0$), altrimenti $\exists c_j < 0$,
entra in base A_j . $\bar{A}_j = B^{-1} A_j$.

Se $\bar{A}_j \leq 0 \rightarrow \text{STOP}$, problema illimitato. Altrimenti
 $t = \arg \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} : \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$, esce $A_B[t]$.

Aggiorna CARRY

Ex: $\min x_1 - x_2 + 2x_3$

Solusi in

$\min x_1 - x_2 + 2x_3$

forma

STANDARD:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_5 = -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Devo trovare base ammissibile iniziale.

Sol. base ammissibile: SBA: $x_4 = 15, x_3 = 3, x_5 = 1, x_1 = x_2 = 0$

$B = [A_4 \ A_3 \ A_5]$ (anonima ma non è I). Conviene portare i termini noti positivi (- errori): $x_1 - x_2 + x_5 = 1$ (e ora $B = I$)

Matrice Carry:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-u^T = c_B^T B^{-1} = -(0 \ 2 \ 0)$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ scegli costi $\begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix}$ nello stesso ordine B.

$$-z = -u^T b = (0 \ -2 \ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

$$- \bar{C}_5 = C_5 - u^T A_5 \text{ Quella!}$$

$$\bar{C}_1 = 1 + (0 \ -2 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \rightarrow \text{entra } A_1 \text{ (sol non ott.)}$$

$$- \bar{A}_1 = B^{-1} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Canonici su base.}$$

$$- t = \arg\min \left\{ \frac{15}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{1} \right\} = 3 \rightarrow \text{erce } A_5 \text{ (3° variabile in base)}$$

- Aggiorno Carvey:

$$\begin{array}{c|cccc} -3 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

\Rightarrow Pivot
Mil
3°
elemento!

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ho nuova Carvey e ricomincio con la base $B = [A_4 \ A_3 \ A_1]$

$$- \bar{C}_2 = -1 - (0 \ -2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \rightarrow \text{entra } A_2$$

$$- \bar{A}_2 = B^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$- t = \arg\min \left\{ \frac{13}{5}, \frac{1}{1}, \frac{1}{-1} \right\} = 2 \rightarrow \text{erce } A_3$$

← non el. positivo

- Aggiorno Carvey

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ \hline 5 & 1 & 0 & -2 & 13 \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -5 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

Nuova base:

$$B = [A_4 \ A_2 \ A_1]$$

Ricomincio:

$$- \bar{C}_3 = 2 + (0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \text{ Non va bene}$$

$$- \bar{C}_5 = 0 + (0 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \rightarrow \text{entra } A_5$$

$$- \bar{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{30} - t = 1 \rightarrow \text{erce } A_4$$

[Variabile che APPENA è uscita non può rientrare subito]

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline (8) & 1 & -5 & 8 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1/8 & -5/8 & 0 \\ \hline 1 & 1/8 & -5/8 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/8 & 3/8 & 0 \end{array}$$

Nuova base:
 $B = [A_5 \ A_2 \ A_1]$
 Ricomincio:

$$\begin{aligned} -\bar{C}_3 &= 2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{8} \cdot 0 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{11}{8} > 0, \text{ Volo oltre} \\ -\bar{C}_4 &= 0 + \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{8} \cdot 0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} > 0 \end{aligned}$$

Soluzione corretta e quella ottima:

$$X_B = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad X_F = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure}$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} \text{nel problema} \\ \text{non standard} \end{array} \right]$$

Posso verificare eventuali errori dell'elenco delle colonne $B = [A_{B[1]} \ A_{B[2]} \ \dots \ A_{B[m]}]$ controllando la Carry. Ricomincio B, prendo la B' dalla Carry e faccio prodotto. Se ho 1 è ok.

H

FORMULAZIONI DI P.L. \Leftrightarrow problema canonico del tipo:

- miscelezione = come costruire un prodotto, non quanto.

Dati portante con contenuto noto o componenti.

È data la scomanda di un prodotto con vincoli sui componenti presenti.

Le variabili sono sempre: quantità di portante nel prodotto.

I vincoli sono:

- contenuto dei componenti nel prodotto
- disponibilità dei componenti.

Esempio tipico: problema della DIETA: terreno:

Voglio coltivare un terreno di 1000 m^2 . 1 m^2 servono
 10 gr N , 5 gr P , 4 gr Fe . Sul mercato trovo:

- sangue di Bue: 1 kg contiene 20 gr N , 10 gr P , 10 gr Fe
- Chimico: $11-22-16$: 1 kg contiene 11 gr N , 22 gr P , 16 gr Fe

Che costano:

- sangue di Bue: 2 € / kg
- Chimico: 10 € / kg

So quanto conviene mi serve, le variabili sono le quantità da comprare:

$X_1 = \text{kg di S di B.}$

$X_2 = \text{kg di 11-22-16}$

Vincoli: (non sulla disponibilità)

$$\begin{array}{l} \text{N} \left\{ \begin{array}{l} 20X_1 + 110X_2 \geq 10000 \text{ gr} \\ 10X_1 + 220X_2 \geq 5000 \text{ gr} \\ 10X_1 + 160X_2 \geq 4000 \text{ gr} \end{array} \right. \quad X \geq 0 \end{array}$$

F. obiettivo: minimizzare il costo: $\min \{2X_1 + 10X_2\}$

- Allocazione di risorse: decidere quanto produrre, non come.

Dati: la ricetta \times produrre 1 unità del prodotto \vee a partire da risorse note; la disponibilità di risorse.

Variabili: quantità da produrre \vee prodotto

Vincoli: disponibilità delle risorse (risorse)

③2 Esempio: devo produrre 2 prodotti A e B usando

3 macchine C, D, E.

- C può produrre 3 unità di A ogni ora, oppure 2 unità di B ogni ora.
- D produce 4 unità di A ogni ora.
- E produce 1 unità di A e 2 di B contemporaneamente ogni ora.

Le macchine costano:

C: 100 €/h; D: 200 €/h; E: 150 €/h

Funzione obiettivo: produrre 100 A e 200 B al costo minimo.

Risorse note: macchinari; qui non ho la disponibilità delle risorse. Non voglio QUANTO produrre, ma il COME, non è prob. di ALLOCAZIONE, ma di RILASCIAMENTO.

$x_1 = \#$ ore di C in modello 1

$x_2 = \#$ " " " " " 2

$x_3 = \#$ " " D

$x_4 = \#$ " " E

$$\min \{ 100(x_1 + x_2) + 200x_3 + 150x_4 \}$$

$$A \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 100 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} 2x_2 + 2x_4 = 200 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

→ FASE 1: - Problema IMPOSSIBILE

- " ha soluzioni ammissibili

- $\text{rank}(\Delta) = m$

- $\text{rank}(\Delta) < m \rightarrow$ eliminare righe ridondanti

- Matrice Carry iniziale x la fase 2.

[METODO DELLE DUE FASI]

Problema iniziale.

$$\min C^T x$$

$$(1) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (2) \\ Ax + Iy = b \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(aggiungo var. artificiali,} \\ \forall \text{ vincolo)} \\ b \geq 0 \text{ (- errori)} \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

Le sol del prob. artificiale sono $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$. Se $\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x}$ è soluzione di (1). Se $\bar{y} \neq 0 \Rightarrow \bar{x}$ non è soluzione. Voglio

$\min \sum_{i=1}^m y_i$ (Problema artificiale), la matrice Carry è

$$\begin{array}{c|c} u^T & -F \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{matrix} -C^T B^{-1} = -C_B^T = (-1 \dots -1) \\ \bar{b} = Ib = b \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -u^T b = -\sum_{i=1}^m b_i = -C_B^T B^{-1} b = \\ = -u^T b = (-1 \dots -1) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Se applico fase 2) al prob. artificiale ho trovato sol. ottima $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ [P.S. non può essere illimitato inf.]

Sol. ottima: - se $y^* \neq 0$ \nexists sol. di (1) con $y = 0 \Rightarrow \nexists$ sol. per $Ax = b \rightarrow (1)$ imposs.

- se $y^* = 0$, \exists sol. ammiss. x^* di (1).

2 proprietà:

• se le y_i^* sono tutte fuori base, la base ottima di (2) è base iniziale di (1) [ha solo x]

la Carry e la Mera a meno della riga 0 che va ricalcolata: $-u^T = -C_B^T B^{-1}$; $-F = -u^T b$ [la funz. da min. è diversa ora siamo i costi veri]

• ho qualche y^* in base, soprattutto nella finale.

$$(34) \quad B = [x_{B(1)} \dots y_{B(i)} \dots]$$

↙ colonna artificiale

Se tolgo una $y_{B[i]}$ devo mettere una x_B .

Devo fare un PIVOT DEC-UPDATE, operazione "forzata", in riga i .

y_i^*

Trovo prima e' uscita, poi cerco x per sost. y .

Colonna \bar{A}_j ; non posso accettare $\bar{a}_{ij} = 0$.

Cerco Variabile fuori base / $\bar{a}_{ij} \neq 0$ [cond. nel. e suff. x indep. lineare di \bar{A}_j dalle altre].

Ripeti finché $\exists y_i^*$ in base.

= Se $y_i^* = 0$ in base e $\forall x$ fuori base $\bar{a}_{ij} = 0$ (matrice A non è di rango pieno) $\text{rank}(A) < m$.

Se $e'_{i'}$ y_i , riga i' -esima di A è comb. lineare delle altre, riga i' è ridondante \Rightarrow la tolgo e continuo.

Scrivo 2) come $x_B = \bar{e} - \bar{F}x_F$. la riga i è $y_i = 0 + 0^T x_F + \dots$. Comb. lineari di righe \Rightarrow riga 0 $\Rightarrow i$ è lin. dep. dalle altre e la tolgo (tolgo anche colonna i)

Ex: $\min -x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_4 = 1 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow$$

continuando $\min y_1 + y_2 + y_3$

problema artificiale

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + y_1 = 4 \\ x_1 - x_4 + y_2 = 1 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 + y_3 = 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

base

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ +1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$B = [y_1, y_2, y_3] \quad \bar{C}_j = C_j - u^T A_j$$

$$\bar{C}_1 = 0 + (-1 -1 -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \rightarrow \text{entra } x_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t = \arg\min \left\{ \frac{4}{1}, \frac{1}{1}, \infty \right\} = 1 \rightarrow \text{esce } y_2$$

Pivot in riga 2.

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -1 & 1 & -1 & -6 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$B = [y_1, x_1, y_3]$$

$$\bar{C}_2 = 0 + (-1 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$$\bar{C}_3 = 0 + (-1 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \rightarrow \text{entra } x_3$$

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t = \arg\min \left\{ \frac{3}{1}, 0, \frac{3}{1} \right\} = 1 \rightarrow \text{esce } y_1$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad B = [x_3, x_1, y_3]$$

Ho finito, ho trovato sol.
di costo nullo! $z=0 \Rightarrow$ sol. ott.
Però devo togliere y_3 .

Sol: $x_3=3, x_1=1, x_2=x_4=0$ ma mi serve la 3^a colonna della base. Voglio fare un pivot nel quale prima esce y_3 e poi entra entrante.

Entra x_2 o x_4 . Calcolo \bar{A}_2 e \bar{A}_4 :

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{non può entrare al posto di } y_3.$$

$$\bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{non può entrare al posto di } y_3.$$

y_3 non può essere sostituita. Riga 3 è lin. dip. dalle altre 2. Se moltiplico eq. per $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sommo ho 0.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_4 = -1 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

\Rightarrow Riga 3 è ridondante, la elimino (anche colonna 3)
Ho $B = [x_3, x_1]$ e come

Carry two:
$$\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$-u^T = -CB^T B^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-z = -u^T b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Rinovo la fase 2:

$$\bar{C}_2 = -1 + (0 \cdot 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \text{ entra } x_2$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; t = \arg\min \{0, \cdot\} \rightarrow \text{prob. illim. inferiormente}$$

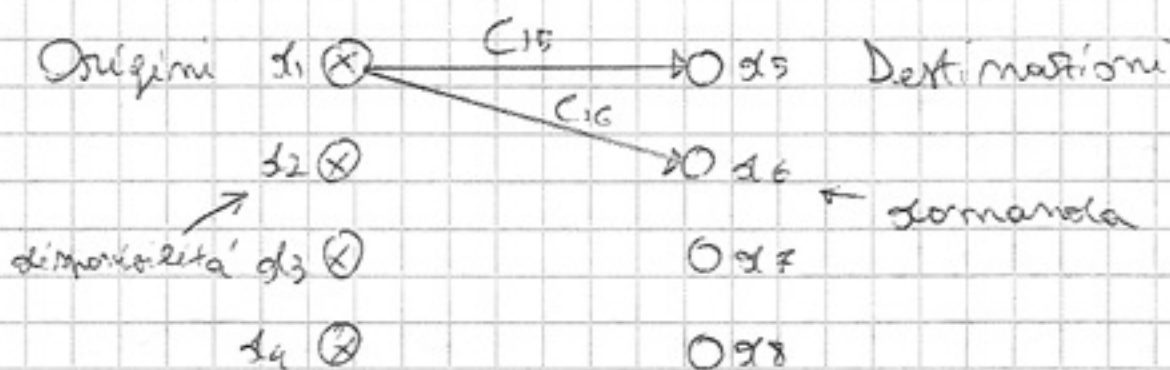
$$x_1 = 1, x_4 = 0, x_3 = 3 + 2x_2 \quad \left. \begin{array}{l} x_2 \rightarrow +\infty \\ x_3 \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow C^T x \rightarrow -\infty$$

H

(La FORMULAZIONE DEI PROBLEMI)

PROBLEMA DEI TRASPORTI

- Devo trasportare "merce" da origini date a destinazioni
- Con costi unitari di trasporto noto \forall coppia O.D.
- Con vincoli sulla domanda (o alla dest.) e disponibilità (o alla O).
- Si assume merce tutta di un tipo.



Problema: quanto trasportare \forall coppia OD

Variazione: x_{ij} = quanto speso da orig. i a dest. j

Vincoli: $\sum_i x_{ij} = d_j$; $\sum_j x_{ij} \leq a_i$ ($\Leftrightarrow \sum_i a_i = \sum_j d_j$, ovvero tutto ciò che è disponibile soddisfa tutta la domanda); $x_{ij} \geq 0$

Funz. obiettivo: $\min \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$

CONVERGENCE & DEGENERAZIONE

12/10/07

- Alg. del Simplex termina se non passa mai 2 volte nella stessa base.

$$B \rightarrow X_B = B^{-1} b \rightarrow Z = C_B^T B^{-1} b$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{B}$$

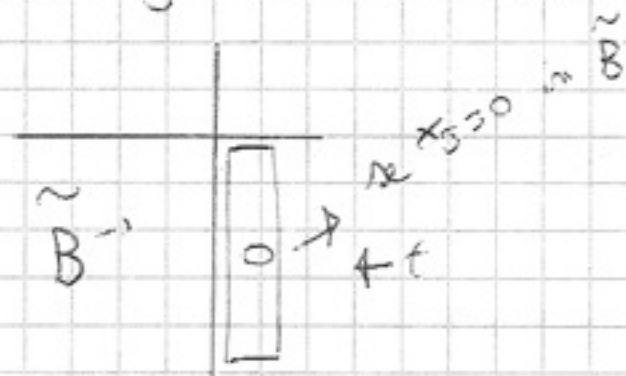
$$X_F = 0$$

Entra x_3 , $C_3 < 0 \rightarrow$

$$\tilde{Z} = C_B^T B^{-1} b + \bar{C}_3 x_3 \quad (\leq ?)$$

iteratione non Degenera \leftarrow Se $x_3 > 0$

Se $x_3 = 0$ iterazione è degenera



Alg. potrebbe fare ciclo con valori degeneri, torna alla B su partenza (rimane su stesso vertice)

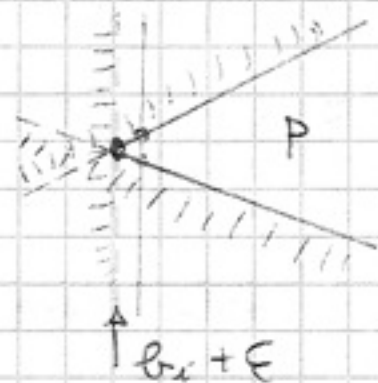
Cmq appare con almeno 6 variabili e 4 vincoli

x evitare PERTURBO le equazioni. Aggiungo

un ϵ : $A_i^T x = b + \epsilon$ 2 vertici \Leftrightarrow

con associata univocamente la base.

Ci si ricalcia $\bar{b} = B^{-1} (b + \epsilon)$. Appena $x_3 > \epsilon$ si ripartisce $\bar{b} = B^{-1} b$.



- Regola anticiclo (Blanch):

"Scegli la var. entrante / uscente con indice minimo"

Es: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e $B = [x_4, x_2, x_1]$; calcolo $\bar{C}_3 > 0$, $\bar{C}_5 < 0$, $\bar{C}_6 < 0$. Tra 5 e 6, scegli C_5 . Es:

$t = \arg \min \{2, 2, 3\} \rightarrow 2$ (guarda e' indice della x, salta tra x_4 e x_2)

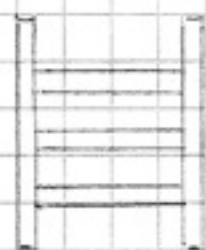
3 casi limite che dimostrano la fragilita' dell'algoritmo.

(38) Spesso con A "senza" o quando espone num. cicli.

PROBLEMA DI TAGLIO OTTIMO

Ho moduli di dimensioni date da cui devi ottenere elementi più piccoli di dimensioni e quantità date.
minimizzare il costo dei moduli.

Es: Devi costruire libreria fatta da:



- 2 montanti da 160 cm

- 3 ripiani da 50 cm

Mont. e rip. le ottengo da tavole da 3 m (risorse)

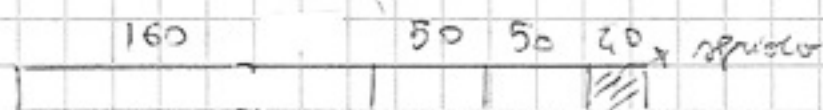
Domanda di 20 librerie semplici e 10 doppie (3 m e 6 m)

Voglio minimizzare il costo della domanda.

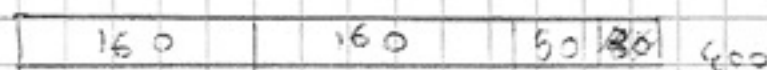
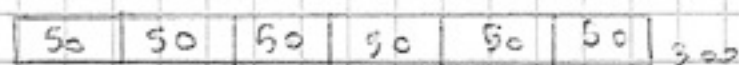
Domanda: 20×2 el da 160 cm + 30 el da 160 cm = 70

20×3 el da 50 cm + 60 el da 50 cm = 120

Risorse: ~~∞~~ moduli da 300 cm ; risorse: tavole da 3 m al costo 20€
~~∞~~ " " 400 cm ; " " 6 m " 30€



Posso tagliare in \leq moduli



...

Le risorse vere sono tavole da 1 metro tagliate in modalità J.

1) $300 \text{ cm} = 6 \times 50 \text{ cm}$; 2) $300 \text{ cm} = 160 \text{ cm} + 2 \times 50 \text{ cm}$

3) $400 \text{ cm} = 2 \times 160 \text{ cm} + 50 \text{ cm}$; 4) $400 \text{ cm} = 160 + 4 \times 50$

5) $400 \text{ cm} = 8 \times 50$

S. possono miscelare le \leq modalità x risorse domanda.

Variabili: $X_i = n$ di tavole tagliate in modalità i

F.obb: min $20(X_1 + X_2) + 30(X_3 + X_4 + X_5)$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 \geq 120 & (\text{per la ogni tipo}) \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 70 & (\text{di taglio}) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Es: progetto strada. $i_{max} = 2\%$

Scavo di prof. h. prossime

20 h m^3 di terra (modello lineare)

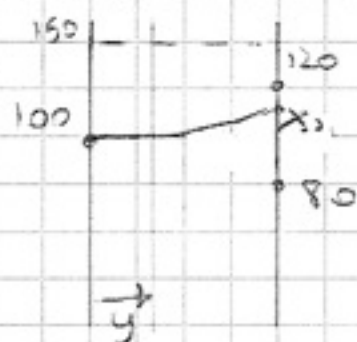
Non voglio aggiungere o togliere altra terra oltre a quella di cantiere.

$\min \sum_{i=1}^3 \max(\text{terra portata nel segmento } i, 0)$

$$\begin{cases} \sum \text{terra portata} = 0 \\ \text{pendenza } i \leq 2\% \end{cases}$$

Se parto da 100 m, dopo 1 km o ho 120 o 80.

$$\begin{aligned} 80 &\leq x_1 \leq 120 \\ x_1 - 20 &\leq x_2 \leq x_1 + 20 \\ 110 &\leq x_2 \leq 150 \end{aligned}$$



Terra portata nel segmento 1 e' trapezio $(50 + (150 - x_1)) \cdot 1000 / 2$

Nel 2° $(160 - x_1 + 160 - x_2) \cdot \frac{1000}{2}$; nel 3° $(80 - x_2 + 90 - 130) \cdot 1000 / 2$

Vincolo terra portata: $200 + 320 + 30 - 2x_1 - 2x_2 = 0$

F.obj: $\min \max\{0, 200 - x_1\} + \max\{0, 320 - x_1 - x_2\} + \max\{0, 30 - x_2\}$ \leadsto solo vincoli di prima ho.

$\min (200 - x_1 + 320 - x_1 - x_2) 500$ [non influenzano nell'ottim. le costanti]

$$\min \dots - 2x_1 - x_2$$

Se scavo prossime h^2 m^3 di terra, la terra portata

$$(50 + 150 - x_1)^2, (160 - x_1 + 160 - x_2)^2, (80 - x_2 + 90 - 130)^2$$

(40)



H5 $(200 - x_1)^2 + (320 - x_1 - x_2)^2 + (30 - x_2)^2 = 0 \rightarrow$ non posso ignorare il segno delle 3 q \rightarrow diventa - [ho dove aggiungere e tolgo] oppure:

$$(200 - x_1) | 200 - x_1 + (320 - x_1 - x_2) | 320 - x_1 - x_2 + (30 - x_2) | 30 - x_2 = 0$$

Si possono linearizzare le f. di max.

$$\min \max \{a, b, c\} + \max \{d, e\} \Rightarrow \min z_1 + z_2 \quad \text{e si aggiungono vincoli:}$$

$\downarrow z_1 \qquad \qquad \downarrow z_2$

$$z_1 \geq a, z_1 \geq b, z_1 \geq c$$

$$z_2 \geq d, z_2 \geq e$$

$$\min (3x_1 + 4x_2 - x_3) + |x_4| \Rightarrow \min z_1 + z_2 \rightarrow \begin{cases} z_1 \geq 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ z_1 \geq -3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 \geq x_4, -x_4 \end{cases}$$

Si linearizzano con le f. lineari ATRATTI

15/10/2007

TEORIA DELLA DUALITA'

Stima per eccesso la soluzione ottima di un problema di PL

P = problema primale

$$\text{Es: } P = \min 6x_1 + 3x_2$$

Stima per eccesso la soluzione ammissibile per P

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ che soddisfa i vincoli di P}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \bar{z} = 27 \rightarrow \text{generica sol. ammissibile}$$

[Obiettivo T.D.D.: STIMARE valore sol. ottima problema di P.L.]

$z^* \leq 27$ può essere interpretato come valore in eccesso delle sol. ammissibili

Si cerca una stima per difetto: [moltiplo + complemento]

$$z = 6x_1 + 3x_2 \geq \underbrace{x_1 - x_2}_{2 \text{ vincoli}} \geq 2$$

quindi $z^* \geq 2$ Va dim che \exists sol. di costo < 41

$$z = 6x_1 + 3x_2 \geq 2x_1 + x_2 \geq 3$$

quindi $z^* \geq 3 \rightarrow$ soluzione di minima più precisa

Combinazione conica dei vincoli

$$6x_1 + 3x_2 \geq 2(2x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) \geq 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10$$

$z^* \geq 10$. Si determinano opportuni moltiplicatori u_1, u_2 :

$$6x_1 + 3x_2 \geq u_1(2x_1 + x_2) + u_2(x_1 - x_2) \geq u_1 \cdot 3 + u_2 \cdot 2$$

$$6x_1 + 3x_2 \geq (3u_1 + 2u_2)$$

Parametrizziamo $3u_1 + 2u_2$ in modo tale che si ha la soluzione più precisa (per difetto).

$$6x_1 + 3x_2 \geq (2u_1 + u_2)x_1 + (u_1 - u_2)x_2$$

$$6x_1 \geq (2u_1 + u_2)x_1$$

$$3x_2 \geq (u_1 - u_2)x_2$$

essendo $x_1, x_2 \geq 0$

$$2u_1 + u_2 \leq 6$$

$$u_1 - u_2 \leq 3$$

$$u_1 \underbrace{(2x_1 - x_2)}_{\geq 3} + u_2 \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\geq 2} \geq 3u_1 + 2u_2$$

$u_1, u_2 > 0$ per il vincolo del primale

PROBLEMA DUALE

$$\max 3u_1 + 2u_2$$

\rightarrow I costi del primale sono i

termini noti del duale

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 \leq 6 \\ u_1 - u_2 \leq 3 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

\rightarrow I termini noti del primale

costituiscono i coeff. del vettore dei

costi nel duale

\rightarrow la matrice dei costi nel duale è la stessa del primale

\rightarrow dai segni dei vincoli deriva il segno del dominio su u_1 e u_2

\rightarrow dai segni del dominio delle variabili del primale

viene definito il segno delle disuguaglianze nel duale

PROBLEMA PRIMA

$$P: \min 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3 & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 7 & (II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 & (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 & (IV) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 0 & (V) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \text{ libera} & (VI) \end{cases}$$

Det. i coefficienti della forma canonica dei vincoli:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq \frac{\mu_1 (x_1 + 2x_2) + \mu_2 (x_1 - x_2 + x_3)}{1} + \frac{\mu_3 (2x_1 + x_2)}{1} \geq 3\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3$$

$$\rightarrow \text{pari a } (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)x_1 + (2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)x_2 + \mu_2 x_3$$

$$2x_1 \geq (\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)x_1 \xrightarrow{IV} 2 \geq \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3$$

$$3x_2 \geq (2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)x_2 \xrightarrow{V} 3 \leq 2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3$$

$$x_3 \geq (\mu_2 x_3) \xrightarrow{VI} 1 = \mu_2$$

$$\mu_1 (x_1 + 2x_2) + \mu_2 (x_1 - x_2 + x_3) + \mu_3 (2x_1 + x_2) \geq 3\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3$$

$$\mu_1 (x_1 + 2x_2) \geq 3\mu_1 \xrightarrow{I}$$

\downarrow

Poiché per I $(x_1 + 2x_2) \geq 3$

allora deve essere anche $\mu_1 \geq 0$

Otteniamo il problema duale

$$D: \max 3\mu_1 + 7\mu_2 + 6\mu_3$$

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_3 \text{ libera} \end{cases}$$

$$\min C^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$a_i = i$ -esima riga di A

$A_j = j$ -esima colonna di A

Ad ogni vincolo si associa una variabile u_i PRIMARIA

PRIMARIA	"CORRISPONDE"	DUALE
$a_i x \geq b_i$	\longrightarrow	$u_i \geq 0$
$a_i x \leq b_i$	\longrightarrow	$u_i \leq 0$
$a_i x = b_i$	\longrightarrow	u_i libera
$x_j \geq 0$	\longrightarrow	$u^T A_j \leq C_j$
$x_j \leq 0$	\longrightarrow	$u^T A_j \geq C_j$
x_j libera	\longrightarrow	$u^T A_j = C_j$

Se ho un problema primale (P)

$\min f(x)$ con $x \in X$, dominio dato dai vincoli
e ho duale (D)

$$\max \phi(u) \text{ con } u \in U$$

allora estremo inferiore

$$\boxed{\inf_{x \in X} f(x) \geq \sup_{u \in U} \phi(u)}$$

• Quando \nexists soluzione per cui è verificata l'uguaglianza si ha il GAP DI DUALITA' ($>$)

• Se ($=$) la sol. ottima del duale è = alla ottima del prim.

$$\min C^T x \rightarrow \max U^T b$$

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Proprietà fondamentali:

④ Data una coppia P-D (primale, duale), il duale

del duale è il primale

Dim:

$$\begin{aligned}
 P: \min C^T x \quad D: \max U^T b &= -\max U^T (-b) \\
 \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U^T A \leq C \\ U \text{ libera} \end{cases} &\equiv \begin{cases} U^T (-A) \geq -C^T \\ U \text{ libera} \end{cases} \\
 \min C^T y &= -\min y^T (-C^T) \\
 P \equiv \begin{cases} Ay = -b \\ y \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} y^T (-A^T) = -b \\ y \geq 0 \end{cases} &\Leftarrow \begin{cases} (-A^T) 0 \geq -C^T \\ U \text{ libera} \end{cases}
 \end{aligned}$$

DUALITA' DEBOLE

Dati P-D

$$\begin{aligned}
 P: \min C^T x \\
 \begin{cases} Ax = b(I) \\ x \geq 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} U^T A \leq C \text{ (II)} \\ U \text{ libera} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Per ogni coppia ammissibile nel duale:

$\forall \bar{x}$ ammissibile, se P e \bar{u} ottimi, per D vale $\boxed{C^T \bar{x} \geq \bar{u}^T b}$

Dim:

$$(I) \quad Ax = b \rightarrow U^T Ax = U^T b$$

$$(II) \quad U^T A \leq C \rightarrow C^T \bar{x} \geq U^T Ax = U^T b$$

$$C^T \bar{x} \geq U^T b$$

CONDIZIONI SUFFICIENTI DI OTTIMALITA'

Dati P-D e date \bar{x}, \bar{u} ammissibili per P e D, se

$C^T \bar{x} \geq \bar{u}^T b \Rightarrow \bar{x}$ e \bar{u} sono ottime rispettivamente per P e D.

Dim: per dualita' debole $C^T \bar{x} \geq \bar{u}^T b = \underbrace{C^T \bar{x}}_{x \text{ ottimo}}$

$$\forall x \quad c^T x \geq c^T \bar{x} \quad (\text{minimo, quindi la sol. è ottima})$$

$$\forall x, u \quad u^T b \leq c^T x \quad \text{quindi} \quad \forall u \quad \underline{u^T b \leq c^T \bar{x} = \bar{u}^T b} \quad (\text{maximo, quindi ottimo})$$

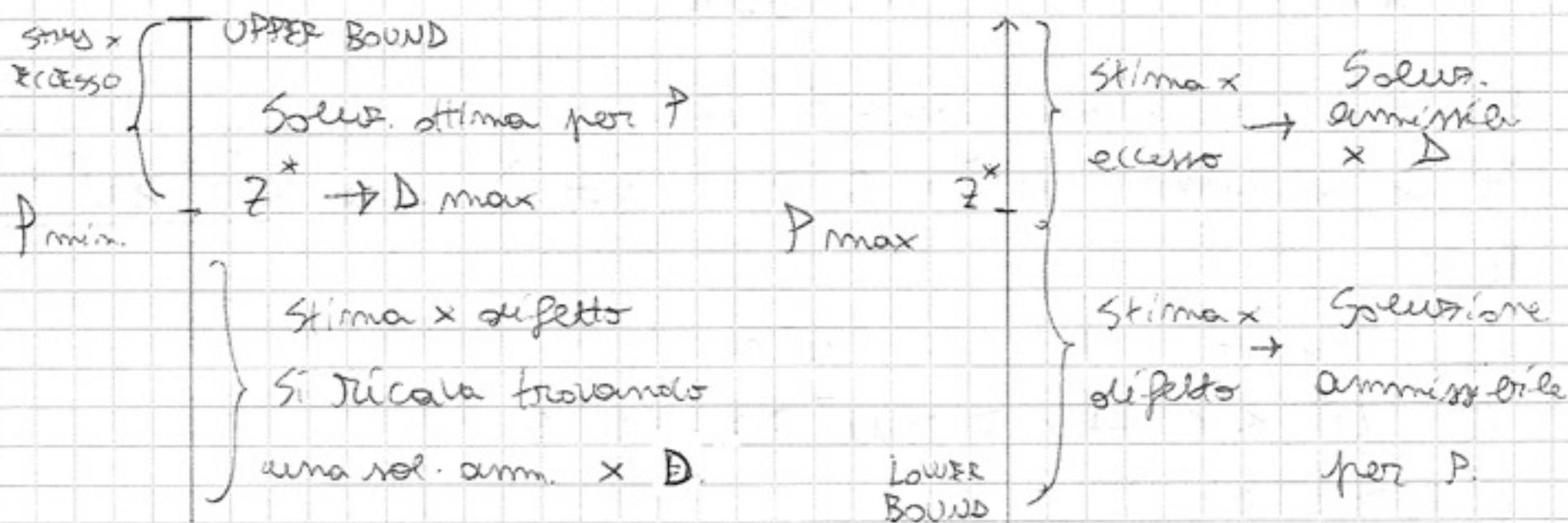
Dati P-D, se P è illimitato allora D non ammette soluzioni. $U = \emptyset$, insieme vuoto.

Dim. x assurdo.

Se $\exists \bar{u}$ ammissibile per D, per D. debole si ha $\forall \bar{x}$ e per \bar{u} $\underbrace{c^T \bar{x}}_{\text{illimitata x ipotesi}} \geq \bar{u}^T b \rightarrow$ questo valore limita inf. la funzione obiettivo

Se il primale non ammette soluzioni il duale è ILLIMITATO.

$$\text{Se ho } \left. \begin{array}{l} P / \max c^T x \\ D / \min u^T b \end{array} \right\} \text{ x qual. debole } u^T b \geq c^T x$$



$$\text{Ex: } \min 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad \max 3u_1 + 6u_2 + 2u_3 + 7u_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 & u_1 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 & u_2 \\ x_2 - 3x_3 \leq 2 & u_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 & u_4 \\ x_1 \leq 0; x_2 \geq 0; x_3 \text{ libera} \end{cases}$$

(46)

$$\begin{cases} 2u_1 + 3u_2 + u_4 \geq 4 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 + u_4 \leq 3 \\ -3u_3 + 2u_4 \leq 2 \\ u_1, u_2 \geq 0 \\ u_3 \leq 0, u_4 \text{ libero} \end{cases}$$

DUALITA' FORTE

18/10/07

Se \bar{x} e \bar{u} sono ottimi per P e D $\Rightarrow C^T \bar{x} = \bar{u}^T b$

Dim: \bar{x} ottima $\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_F \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B > 0$ se base non degenera
 $\bar{x}_F = 0$

$$\bar{C}_F^T = \underbrace{C_F^T}_{\text{Vett. cost. ridotti delle var. fuori base}} - \underbrace{(C_B^T B^{-1} F)}_{\text{Vett. cost. var. in base}} \geq 0$$

matrice
colonne
var fuori
base

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Quindi $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\bar{x}_F = [x_2] = [0]$

$$Ax = b$$

Quindi $Bx_B + Fx_F = b$

$$[B \ F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = b$$

Vogliamo dim. che $\bar{u} = C_B^T B^{-1}$ e' ammissibile per D ①
e $C^T \bar{x} = \bar{u}^T b$ ②.

Vincoli di D:

$$\bar{u}^T A \leq C^T \rightarrow \bar{u}^T [B \ F] \leq [C_B \ C_F]^T$$

Data $\bar{u} = C_B^T B^{-1}$ e $\begin{cases} \bar{u}^T B \leq C_B^T \\ \bar{u}^T F \leq C_F^T \end{cases}$

$$\begin{cases} C_B^T B^{-1} \cdot B \leq C_B^T \quad \checkmark \\ C_B^T B^{-1} \cdot F \leq C_F^T \text{ ovvero } C_F^T - C_B^T B^{-1} F \geq 0 \quad \checkmark \end{cases} \quad \text{① (v)}$$

$$C^T \bar{x} = C_B^T \bar{x}_B + C_F^T \bar{x}_F. \text{ In sol. ottima } \bar{x}_B = B^{-1} b \quad \text{④}$$

$$q_{\min} = \underbrace{C^T \cdot B^{-1} b}_{\bar{U}^T b} + \underbrace{(F^T \bar{x}_F)}_{0} = \bar{U}^T b \quad (2) \text{ CVD}$$

H

TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

\bar{x} e \bar{u} sono ottime in P-D se:

1) $A\bar{x} = b$ (amm. di \bar{x})
 $\bar{x} \geq 0$

2) $\bar{U}^T A \leq C^T$ (// di \bar{U})

3) $C^T \bar{x} = \bar{U}^T b$

3') $\boxed{\bar{x}^T (\bar{U}^T A - C) = 0} \rightarrow \text{Condizione di ORTOGONALITA' (1), 2)}$

Se $\bar{x}_j > 0 \Rightarrow \bar{U}^T A_j = C_j$

Se $\bar{U}^T A_j < C_j \Rightarrow \bar{x}_j = 0$

$$\bar{x}^T (\bar{U}^T A - C) = \underbrace{(A\bar{x})^T}_{\substack{\rightarrow \text{per vincoli di P e } b}} \bar{u} - C^T \bar{x} = 0 \Rightarrow b^T \bar{u} - C^T \bar{x} = 0$$

3') \Leftrightarrow 3)

Se D e' $\max U^T b$; $U^T A \leq C$ e $u \geq 0$:

1) $A\bar{x} \geq b$
 $\bar{x} \geq 0$

2) $U^T A \leq C$
 $\bar{U} \geq 0$

3) $\bar{x}^T (U^T A - C) = 0$
 $\bar{U}^T (A\bar{x} - b) = 0$

$\bar{u}_i > 0 \Rightarrow a_i \bar{x} = b_i$

$a_i \bar{x} > b_i \Rightarrow \bar{u}_i = 0$

ANALISI DELLA SENSIBILITÀ

Se ho \bar{x} ottima con B , si vuole minimizzare quanto possono variare i parametri del problema affinché B rimanga ottima.

$$\bar{x}_B = B^{-1}b$$

$$\bar{c} = c - c_B^T B^{-1}A \geq 0$$

ottimalità: 1) $\bar{x}_B \geq 0 \Rightarrow B^{-1}b \geq 0$

$$2) \bar{c} \geq 0 \Rightarrow c - c_B^T B^{-1}A \geq 0$$

1) Variamo termini noti e 2) interi. Ammiamo $b = b + \Delta b$

$$\text{Quindi } B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0 \rightarrow \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}_B} \geq -B^{-1}\Delta b$$

2) Variamo c_B . $\bar{c} = [0, c_F - c_B^T B^{-1}F] \geq 0$. Se si considera

$$\text{cioè, } c_F - (c_B + \Delta c_B)^T B^{-1}F \geq 0 \rightarrow \underbrace{c_F - c_B^T B^{-1}F}_{\bar{c}_F} \geq \Delta c_B^T B^{-1}F$$

Ex: si deve fare dieta x animale considerando m alimenti naturali. Il j -esimo alimento ha c_j . I in sostanze nutritive (i -esima); a_{ij} è la quantità di sostanza i nell'alimento j . Legge impongono che $\forall i$ si deve assumere b_i . Si vogliono min. i costi totali.

- Variabili: x_j : q.ta' alimento j

- F.obb:
$$\min \sum_{j=1}^m c_j x_j$$

- Vincoli:
$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$x_j \geq 0$$

I sostanze che possono sost. sintetica.

Se u_i : prezzo i -esima sostanza Voglio che allevatore compri min. prodotti. Dato $\max \sum_{i=1}^m u_i b_i$ e vincoli:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \leq c_j \quad \forall j = 1 \dots m$$

Data la seguente Carry:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 9 & 11 & -15 \\ \hline 1 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 15 \\ -1 & -2 & 0 & 1/4 & 3 \\ 1 & 1/3 & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

$(4 \times 4) \quad B^{-1} \quad \bar{b} = B^{-1} b$

e $\bar{C}_F = \begin{bmatrix} \bar{C}_3 \\ \bar{C}_4 \\ \bar{C}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

Analisi di sens. su Δb

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Deve valere $B^{-1} b \geq -B^{-1} \Delta b$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \geq B^{-1} \Delta b \rightarrow \Delta b = [\Delta b_1 \quad \Delta b_2 \quad \Delta b_3 \quad \Delta b_4]^T$

$1 \geq (\Delta b_{(1)} - \Delta b_{(2)} + \frac{1}{2} \Delta b_{(3)})$

$15 \geq (\Delta b_{(2)} + \Delta b_{(3)} - \Delta b_{(4)})$

$3 \geq (-\Delta b_{(1)} - 2 \Delta b_{(2)} + \frac{1}{4} \Delta b_{(4)})$

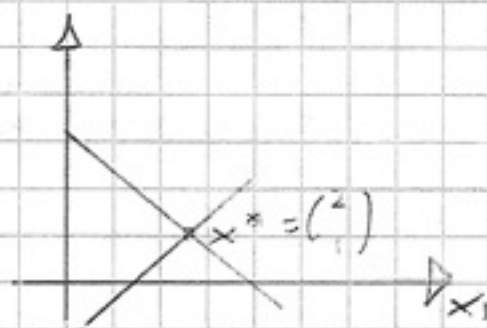
$2 \geq -(\Delta b_{(1)} + \frac{1}{3} \Delta b_{(2)} + 2 \Delta b_{(3)})$

$\left. \begin{array}{l} 1 \geq -\Delta b_{(1)} \\ 3 \geq \Delta b_{(1)} \\ 2 \leq \Delta b_{(1)} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \leq \Delta b_{(1)} \leq 3$

Si annullano tutte le componenti tranne quella considerata.

min $-x_1$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$



Voglio dim. che è OTTIMO.

19/10/07

(50)

- Costruisco il duale. Assoc. ad ogni vincolo una var. duale

$$\min -x_1$$

$$\max 2u_1 + u_2$$

Si scambia il

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

→

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \begin{cases} u_1 + u_2 \leq -1 \\ u_1 - u_2 \leq 0 \\ u_1 \leq 0 \\ u_2 \geq 0 \end{cases}$$

quale var./vincolo

(in opposizione)

- Applico le cond. di ortogonalità:

$$u_1(x_1 + x_2 - 2) = 0$$

x è ottima primale e la ottima duale

$$u_2(x_1 - x_2 - 1) = 0$$

\Leftrightarrow valido sistema

$$x_1(u_1 + u_2 + 1) = 0$$

Sostituisco

$$x_2(u_1 - u_2) = 0$$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ipotizz. Fatta.

$$\begin{cases} u_1(2+1-2) = 0 \rightarrow u_1 = 0 \\ u_2(2-1-1) = 0 \checkmark \\ 2(u_1 + u_2 + 1) = 0 \quad u_1 + u_2 = -1 \\ 1(u_1 - u_2) = 0 \quad u_1 = u_2 \end{cases}$$

Non c'è soluzione $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è soluzione

$$\downarrow \\ 0 = -1 + u_0$$

ottima. Provo $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$u_1(2+0-2) = 0 \rightarrow \checkmark$$

$$u_2(2-0-1) = 0 \rightarrow u_2 = 0$$

$$\rightarrow u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Ma non basta.}$$

$$2(u_1 + u_2 + 1) = 0 \rightarrow u_1 = -1$$

$$0(u_1 - u_2) = 0 \rightarrow \checkmark$$

Questa u deve essere ammissibile:

I segni di u sono di $-1+0 \leq 1 \wedge -1-0 \leq 0 \Rightarrow ok \Rightarrow$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è ottima primale

\exists sol. ottima con $x_1, x_2 > 0$? Se sì, quale?

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = -1 \\ u_1 = u_2 \end{cases}$$

→ Verifico l'ortogonalità.

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{e la } x \text{ è pari a } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

NO, non

sono sol. ammiss. ($u_2 \leq 0$)

$$\text{Ex: } \min -x_1 + x_2 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ -x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

Immagino il prob.

artificiale (se ad ex $2x_1$ & $5x_4$ aggiungiamo una var.)

$$\min x_5 + x_6 + x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \\ -x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_7 = 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Fase 1 base iniziale $B = [A_5 \ A_6 \ A_7]$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

$$\bar{C}_1 = 0 + (-1 \ -1 \ -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \rightarrow \text{entra } x_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad t = \arg\min \left\{ \frac{10}{2}, 0, \frac{5}{1} \right\} \text{ con}$$

la Regola di B. (indice minimo) = 1 \rightarrow esce x_5

$$\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -1 & -15 \\ f \rightarrow 2 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1/2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Nuova Coverby associata a $B = [A_1 \ A_6 \ A_7]$

\rightarrow Ho trovato sol. ammiss. x problema originario

$$\text{Calcolo } \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{puo' sostituire } A_6 \text{ o } A_7$$

Prendiamo ad ex. A_6

$$\textcircled{52} \quad B = [A_1 \ A_2 \ A_7]$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}$$

Pivot degenero (cammeria la base ma la sol e' la stessa)

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{NO}$$

$$\bar{A}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{NO}$$

Nessuna x soddisfa A_7 quindi riga 3 è comen. lineare delle altre \Rightarrow la brutta, ho:

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}$$

e $B = [A_1, A_2]$. Passo init. fase 2

ricolcolando la riga 0: $-u^T = -c_B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ e $-z_B = -u^T \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (z = -c_B^T B^{-1} b = -c^T \hat{b})$

-Fase 2:

$$\bar{C}_3 = 0 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \text{NO}$$

$$\bar{C}_4 = 2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ è anche OTTIMO}$$

EX: max $-x_3 + x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}$$

$$-u^T = -c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_1 = 0 + (-1 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \rightarrow \text{entra } x_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$t = \arg\min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{5}{3} \right\} = 2 \rightarrow \text{esce } x_4$$

min $x_3 - x_4$



min x_3

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Porto
in
forma
standard

$$B = [A_5 \ A_1]$$

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & -1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & 5/3 \end{array}$$

$$\bar{C}_2 = 0 + (-1) \left(\frac{2}{3} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \text{ entra } x_2$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad t = \argmin \left\{ \frac{2/3}{1/3}, \infty \right\} = 1$$

esce x_5 .

$$\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \Rightarrow B = [A_2 \ A_1]$$

\Rightarrow finita fase I con quella carry a meno nella riga 0!

$$-u^T = (B^T B^{-1}) = (0 \ 0) \quad (x \text{ caro e' come prima})$$

$$\bar{C}_3 = 1 + (0 \ 0) B^{-1} = 1$$

$$\bar{C}_4 = -1 \rightarrow \text{entra } x_4$$

$$\bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{problema illimitato inferiormente}$$

[e alla fine fase I $Z < 0$ allora prob. e' impossibile, non riesco a far uscire var. artificiale]

Ex: 6 dipendenti da addestrare in 1 sett. o con tutor esterno o con tutor interno (1:1). Quegli formati possono formare gli altri (int.). Durante la settimana sono IMPRODUTTIVI. Il t. est. costa 4000 E/r; il disp. lavora 40 h/sett. nelle prox. 3 settimane va completato un progetto di 360 h [oltre a formare i 6 disp.]

(54) Voglio il min. n. di tutor esterni da assumere,

min ~~*~~ tutor esterno.

- Regione nella settimana. Variabili sono $X_i = n^{\circ}$ tutor esterni nella settimana i e $Y_i = n. t.$ interne nella sett.

$$\text{Minim } X_1 + X_2 + X_3$$

$$y_1 = 0 \quad (1)$$

$$y_2 \leq x_1$$

$$y_3 \leq x_1 + x_2 + y_2$$

$$y_2 \leq 7$$

$$y_3 \leq z_1 + z_2$$

$$f_1 = x_1 + 4,$$

$$5) \quad z_2 = x_2 + y_2$$

$$[7]_3 = x_3 + y_3$$

$$2) \quad (6 - z_1 - y_1) + (6 - z_2 - y_2) + (6 - z_3 - y_3) \geq \frac{360}{40}$$

3) FILE P.L.

22/10/07

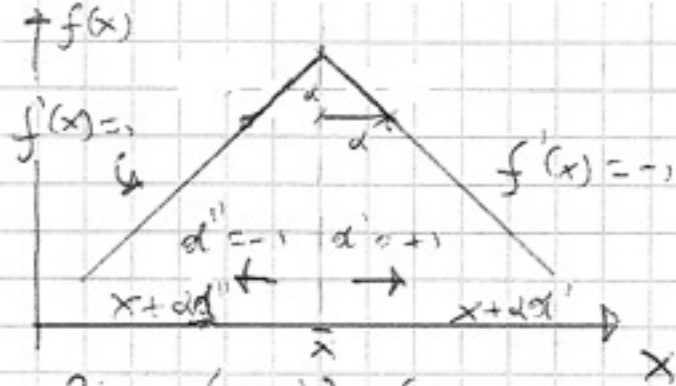
- Parte non vincolata: ins. ammissibile $= \mathbb{R}^n$ (f. definita ovunque), $\min f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$

\exists PNL non v. CONVESSA se $f(x)$ convessa

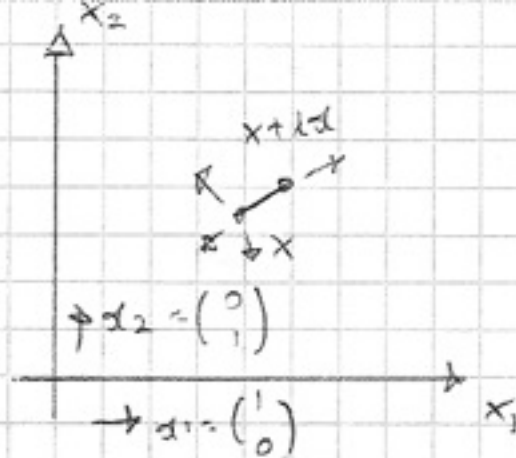
- Derivata destra: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

com

$\lambda \in \mathbb{R}^+$ e \mathbf{v} vettore $\in \mathbb{R}^m$



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} = -1 \quad \begin{matrix} \text{(sia con } d' \\ \text{che con } d'') \end{matrix}$$



Se come direzione ho $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} =$
Derivata PARZIALE

$$x + \lambda d_1 = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se conr. $d_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + i$ ho la derivata.

- Gradiente:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

↪ HESSIANA (simmetrica)

Lege ∇ con d dir.:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^T d$$

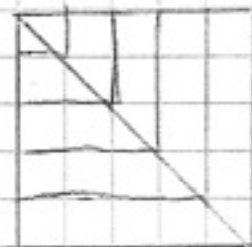
- Matrice definita positiva su un insieme X se

$$\forall x \in X \Rightarrow x^T A x > 0 \quad [A(n \times n)]$$

- Matrice semi def. pos. se $x^T A x \geq 0$

- TH: Se A sym ($a_{ij} = a_{ji}$) e' def. pos. \Leftrightarrow tutti i determinanti dei minori principali sono > 0

H: m. quodr. e' sottomatrice nella diagonale:



(e' semi def pos se ≥ 0)

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $1 > 0$
 $-3 < 0$

\Rightarrow non e' def. pos., e'
 INDEFINITA

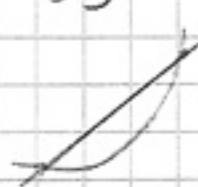
- Matrice e' definita negativa (o semi def) se

- A e' def. positiva (o semi def)

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow -A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $1 > 0$
 $-5 < 0$ \rightarrow NO def. pos.
 A NO def. neg.

- Def. $f(x)$ convessa su X convessa se $\forall x, y \in X, \lambda \in (0,1)$

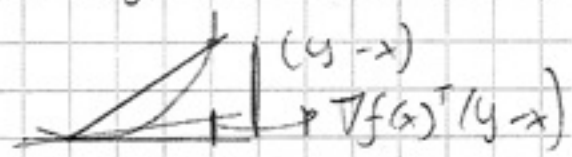
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$



TH: Se $f(x)$ e' convessa, $\forall x, y \in X$ si ha che

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y-x)$$

Vettore al punto, la der. dir. \leq



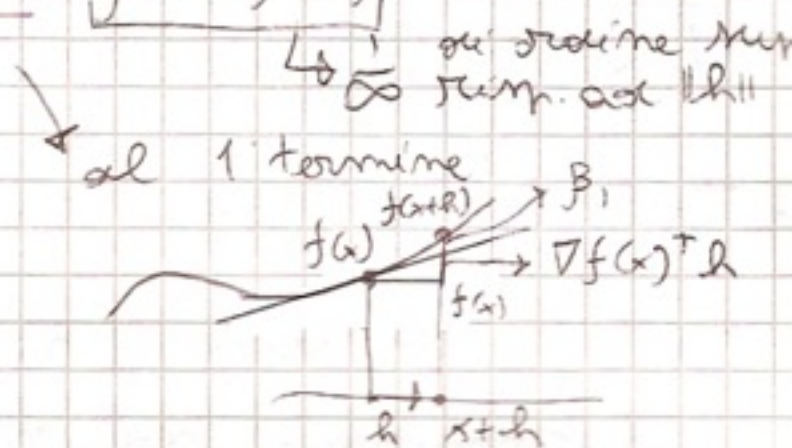
diff. ovvero la funzione e' sempre sopra alla tangente.

- Sviluppo in serie di Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \beta(x, h)$$

allora $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\beta_1(x, h)}{\|h\|} = 0$

β_1 va a 0 + rapidità dell'imp. elemento.



Al 2° termine:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T \cdot h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h + \beta_2(x, h)$$

con $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\beta_2(x, h)}{\|h\|^2} = 0$

ho approx. migliore della funzione.

(ora Th di prima: DM)

Imp. convessa

Pongo $\varepsilon = 1 - \lambda$. Allora $f(x - \varepsilon x + \varepsilon y) \leq f(x) - \varepsilon f(x) + \varepsilon f(y)$

$\rightarrow f(x + \varepsilon(y-x))$ [la stesso con Taylor con $y-x = \delta$]

$$= f(x) + \nabla f(x)^T \cdot \varepsilon(y-x) + \beta(x, \varepsilon, y)$$

$$f(x) + \varepsilon \nabla f(x)^T (y-x) + \beta_1(x, \varepsilon, y) \leq f(x) + \varepsilon f(y) - \varepsilon f(x)$$

$$\nabla f(x)^T (y-x) + \frac{\beta_1(x, \varepsilon, y)}{\varepsilon} \leq f(y) - f(x)$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad \quad \quad = \nabla f(x)^T (y-x) \leq f(y) - f(x)$

- Vale anche: se $f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y-x) \forall x, y \in X \Rightarrow f(x)$ convessa su X [inversa di prima]

(58) - Se A def. pos \Rightarrow tutti gli autovalori di A

$$\lambda_{\min} > 0$$

[autovalori]

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm}-x \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall x \Rightarrow \|x\|^2 \cdot \lambda_{\min} \leq x^T A x \leq \|x\|^2 \cdot \lambda_{\max}$$

= TH: Se $f(x)$ / $\nabla^2 f(x)$ e' def. pos. in x allora $f(x)$ e' convessa in un intorno di x $\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0 \right]$

Dim. uso Taylor al 2° termine:

$$f(x + \varepsilon(y-x)) = f(x) + \varepsilon \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (y-x)^T \nabla^2 f(x) (y-x) + \beta_2(x, y, \varepsilon)$$

$\hookrightarrow > 0$

Se $\varepsilon \rightarrow 0^+$ anche $\frac{1}{2} \dots \rightarrow 0$, + rapidamente di β_2
e globalmente $\frac{1}{2} \dots + \beta$ e' > 0 . Se lo tengo ho
 $f(x + \varepsilon(y-x)) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y-x) \Rightarrow f(x)$ conv. localmente

- \bar{x} e' DIREZIONE DI DISCESA $\exists \bar{\lambda} / f(x + \bar{\lambda}d) \leq f(x)$ per $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$

- \bar{x} e' min. locale se \nexists dir. di discesa

$$[f(y) \geq f(\bar{x}) \quad \forall y / \|y - \bar{x}\| < \varepsilon]$$



- TH: Se $f(x)$ e' derivabile $[\in C^1, \text{e' con der. parte. continue}]$ allora \bar{x} e' min. locale $\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0$

\hookrightarrow CONDIZIONE NECESSARIA DEL 1° ORDINE

Dim: $f(\bar{x} - \nabla f(\bar{x})\lambda)$ e' non vero e' $< f(\bar{x})$ da Taylor.

$$f(\bar{x} - \nabla f(\bar{x}) \lambda) = f(\bar{x}) + \underbrace{\nabla f(\bar{x})^T \cdot [-\lambda \nabla f(\bar{x})]}_{-\lambda \|\nabla f(\bar{x})\|^2} + \beta_1(x, \lambda)$$

$$f(\bar{x} - \nabla f(\bar{x}) \lambda) < f(\bar{x})$$

↳ ANTI-GRADIENTE che è sempre una dir. di discesa

- TH: C. NECESS. DEL 2° ORDINE. Se \bar{x} è min. locale e $f(x) \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow \underline{\nabla f(\bar{x}) = 0}$ e $\underline{\nabla^2 f(x)}$ è semi def. pos.

- TH: C. SUFF. DEL 2° ORDINE. Se $f(x) \in \mathbb{C}^2$ e $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(x)$ è def. pos. $\Rightarrow \underline{\bar{x} \text{ è min. locale}}$

- Se $f(x)$ è convessa e continua e $f(x) \in \mathbb{C}^1$ allora $\underline{\bar{x} \text{ è min. globale} \Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0}$

23/10/07

ALGORITMO DISCESA (LINE SEARCH)

Scegli un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $k=0$

While $\nabla f(x_k) \neq 0$

• scegli direzione di discesa d_k

• scegli un passo α_k (line search)

• $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

$k=k+1$

Ho $f(x)$, voglio min $[\nabla f(x)=0] \Rightarrow$ ho x_1, \dots, x_n che la ricerca tra questi ci porta verso minimo. Basta calcolare $f(x_1), \dots, f(x_n)$ e prendere l'argmin

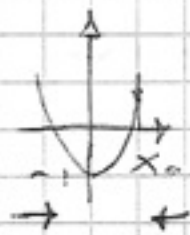
$x^* = \arg \min_{x_i} \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$, punto di min. GALE

⑥ Se sono certo che \exists min. glob. Se non sono certo?

CONDIZIONI DI ESISTENZA DI UN MINIMO GLOBALE

- se $f(x)$ è continua in X chiuso e limitato $\Rightarrow \exists$ min glob. (WEIERSTRASS)
- se $f(x) \in C^0$ su un insieme di livello chiuso e limitato $\Rightarrow \exists$ min glob
- min. livello $(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq \alpha\}$
- superficie di livello $(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = \alpha\}$
- se $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists$ min glob

Es: $f(x) = x^2 - 1 \rightarrow \nabla f(x) = 0$ in $x=0$; $\nabla^2 f(x) = 2 \Rightarrow x=0$ p. di min.
 $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e' anche globale



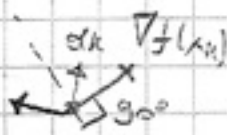
Applico alg. desc. a partire da x_0 e produco $x^k = (-1)^k (1 + \frac{1}{k}) \rightarrow$ non arriva a 0!
 $x^0 = 2$; $x^1 = -2$; $x^2 = \frac{3}{2}$; $x^3 = -\frac{4}{3}$

$$f(x^0) = 3; f(x^1) = 3; f(x^2) = \frac{5}{4} \rightarrow f(x^k) \rightarrow 0$$

Alg. n. avvicina infinitamente. Il lim. della succ. e' 0. Massimo. Ma non basta:

- CONDIZIONE D'ANGOLO indica come scegliere la dir. di

discesa: d_k e $\nabla f(x_k)$ formano angolo $> 90^\circ$,
 ovvero: $d_k^T \cdot \nabla f(x_k) \leq -\epsilon \|d_k\| \cdot \|\nabla f(x_k)\|$



Con $\epsilon > 0$ piccolo a piacere $\hookrightarrow (\cos < 0)$

Si sceglie ad es. ANTIGRADIENTE $-\nabla f(x_k) = d_k$ che e' la
 dir. di MAX discesa \hookrightarrow METODO DEL GRADIENTE

- CONDIZIONE DI SUFFICIENTE RIDUZIONE: nel punto

il problema in N dimensioni e' ridotto a 1 dim.

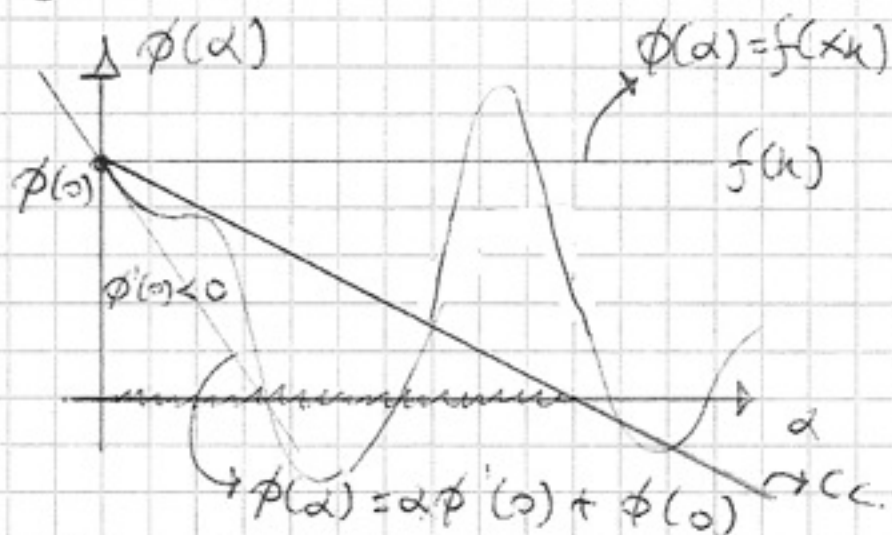
$$x \xrightarrow{\alpha_k d_k} x_k + \alpha_k d_k$$

Studio del. funzione lungo semiretta

(line search), prop. Hauder.

$$f(x_k + \alpha \alpha_k) = \phi(\alpha) \text{ con } \alpha > 0$$

$f(x_k) = \phi(0)$. la minimizzazione deve essere significativa!



Localmente la f si minimizza (all'infinito). $\phi'(0) < 0$

$$\phi'(\alpha) = \nabla f(x)^T \left(\frac{dx}{d\alpha} \right) \rightarrow \alpha_k$$

$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \quad \left[\frac{dx_i}{d\alpha} \right]$

Voglio che f abbia valore < di f_0 e deve essere forte. Vedo che la f è compresa tra $\phi(\alpha) = f(x_k)$ e $\phi(\alpha) = \alpha \phi'(0) + \phi(0)$ localmente.

Scego COMBINAZIONE CONVESSA e Voglio che $\alpha < \alpha_k$ e che

$$C.C. : f(x_k) + \gamma \alpha \phi'(0)$$

Cond. di suff. minimizzazione: $f(x_k + \alpha_k \alpha_k) \leq f(x_k) + \gamma \alpha \nabla f(x_k)^T \alpha_k$
con $\gamma \in [0, 1]$

- CONDIZIONE DI WOLFE:

$$\phi'(\alpha_k) \geq C \phi'(0) \text{ con } C \in [\gamma, 1]$$

$$4 \left[\nabla f(x_k + \alpha_k \alpha_k)^T \alpha_k \geq C \cdot \nabla f(x_k)^T \alpha_k \right]$$

la derivata in α_k deve essere -pendente della α_k in 0, cioè la deriv. deve diminuire \rightarrow a ∇ nullo.

$$\lim_{x_k \rightarrow \infty} \nabla f(x_k) = 0$$

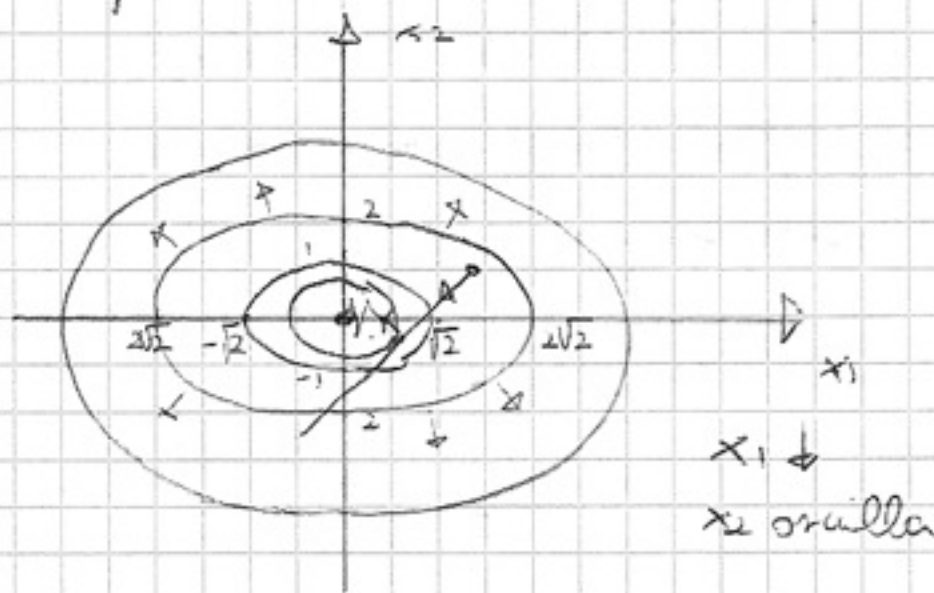
Se adeg. non si ferma, la succ. di punti generati converge / oscilla

(2) Verificare ∇ nullo.

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \quad e \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Adottiamo metodo del gradiente $[dh = -\nabla f(x_k)]$

Sceglia α_k che minimizza $\phi(\alpha)$ [line search esatta]



$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \text{ si annulla in } 0.$$

Un altro algoritmo:

$$d^0 = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -4x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x^0} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\alpha) = \underbrace{(2 - 4\alpha)}_{x_1}^2 + 2 \underbrace{(1 - 4\alpha)}_{x_2}^2$$

$$x' = x^0 + \alpha_0 d^0; \quad x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_0 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\alpha) = 48\alpha^2 - 32\alpha + 6 \rightarrow \text{deriva e annulla: } \phi'(\alpha) = 96\alpha - 32 = 0$$

$$\text{P. di minimo } \alpha_0 = \frac{32}{96} = \frac{1}{3} \Rightarrow x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Ripeto partendo da x' :

$$\nabla f(x') = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}; \quad d' = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}; \quad \phi(\alpha) = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\alpha\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\alpha\right)^2$$

$$\phi'(\alpha) = -\frac{8}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\alpha\right) + \frac{16}{3}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\alpha\right) = 0 \Rightarrow \alpha = \dots; \quad x'' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\alpha \\ -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\alpha \end{pmatrix}$$

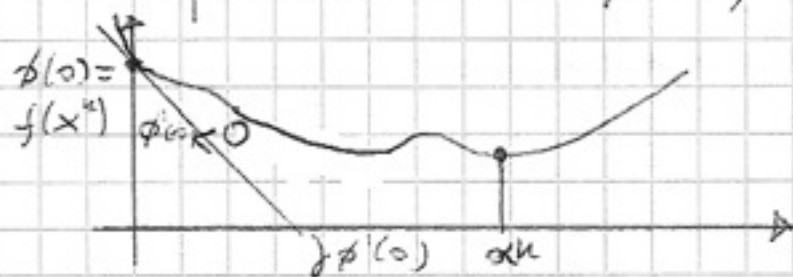
$$\text{e si ricomincia si ha } x^k = \begin{pmatrix} \frac{2}{3^k} \\ (-1)^k \cdot \frac{1}{3^k} \end{pmatrix}$$

25/10/2007

MODULO DI ARMIJO (BACKTRACKING)

Line search "approssimata", + semplice da implementare dell'esatta ma nessuno dei 2 soddisfa le 3 cond. comp.

5) quella d'angolo, la migliore soluzione NO nella esatta,



Si vuole nella esatta $[\phi'(\alpha_k) > (c\phi'(0), \gamma < c < 1)]$. Annullo il contrario

Si vuole sia ma NO nessun. Vuole

- Cerco α max che soddisfa la sufficiente riduzione
- espleta pochi valori di α [Voglio che sia veloce]
(contraddice sopra)



- Trova un valore iniziale α^0 ($i=0$) nell'intervallo
- finché $\phi(\alpha^i)$ non soddisfa la suff. riduzione,
poni $\boxed{\alpha^{i+1} = \sigma \alpha^i}$ con $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ ($i=i+1$)

Verifico $\phi(\alpha^i) \leq \phi(0) + \alpha^i \gamma \phi'(0)$

Se no, prendo $\alpha^1 = \frac{\alpha^0}{2}$ oppure $\alpha^2 = \frac{\alpha^0}{4}$, $\alpha^3 = \frac{\alpha^0}{8}$; ... (ad

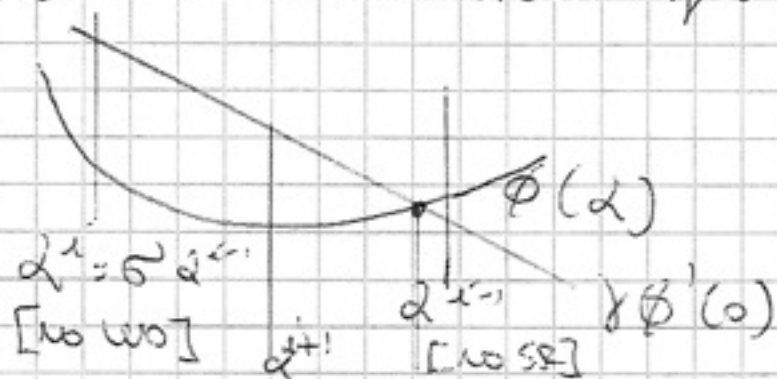
es.) e mi fermo. Per $\alpha \rightarrow 0$ la suff. riduz. è garantita che sia verificata (Wolfe non è mai testata) + σ è piccolo, + è difficile trovare Wolfe.

Il

METODO DI BISEZIONE

Parla uguale ad Armijo, solo che si applica:

- Se α^{i+1} non soddisfa Wolfe, prova $\alpha^{i+1} = \frac{\alpha^i + \alpha^{i-1}}{2}$



Es: α^{i-1} non soddisfa suff. rid.
e α^i no Wolfe ma A.P.

In mezzo c'è intervallo che
li soddisfa entrambi.

Se no, rifaccio bisezione (d + piccolo che non SR e α
+ grande che no Wolfe).

Stantoppis è pazzo in più, la usa se la fun. è
abb. "strana". Garantisce conv. globale.

CONVERGENZA GLOBALE

Se esiste a punto stationario \forall scelta del punto iniziale

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x^k) = 0} \quad \forall x^0$$

altrimenti ha CONVERGENZA LOCALE se $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f(x^k) = 0$ solo se $x^* \in I(x^*)$

(intorno punto stationario) $\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*}$

È difficile calcolare intorno.

Tutti i metodi basati sul gradiente sono "lenti".

RAPIDITA' DI CONVERGENZA

Quanto rapidamente $\|x^k - x^*\| \rightarrow 0$:

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|}} \rightarrow \text{Se } \infty \text{ o alg. non converge, mi allontano. Se è pari a valore } C.$$

- $C \geq 1$: converg. SUBLINEARE (male, k può anche allontanare)
- $0 < C < 1$: " LINEARE
- $C = 0$: " SUPERLINEARE

$$\text{Se } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = 0 \quad \text{QUADRATIC}$$

$$\text{Se } \|x^k - x^*\| = \frac{1}{k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = 1 \rightarrow \text{sub-lineare}$$

$$\text{Se } \|x^k - x^*\| = \frac{1}{2^k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{lineare}$$

Calcolarsi rapp. numero finito di punti.

$$\frac{1}{k!} \text{ è conv. superlineare: } \frac{1}{(k+1)!} \cdot k! = \frac{1}{k+1}$$

$\frac{1}{2^{2^k}}$ è quadratico

Da ex: $X^k = \begin{pmatrix} (\frac{2}{3})^k \\ (-1)^k (\frac{1}{3})^k \end{pmatrix}, \quad X^\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|X^k - X^\infty\| = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Il metodo del grad. converge globalmente con
 rapidità LINEARE, che non è del tutto soddisfacente.

Per la line-search esatta c'è METODO DELLA INTERPOLAZIONE:
 al posto di lavorare su $\phi(\alpha)$, lo approx con
 un polinomio e trovo il minimo (di $\phi(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ e lo uso come α succ).

1 parametro: conosco $\phi(0) = f(X^k)$ e $\phi'(0) = \nabla f(X^k)^T \cdot d^k$
 e calcolo $\phi(\alpha^*) = f(x_i)$ generico:

$$\phi(0) = c; \quad \phi'(0) = b; \quad a\alpha^2 + b\alpha + c = \phi(\alpha^*)$$

$$\phi'(\alpha) = 2a\alpha + b \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}}$$

Scegli α_0 calcoli $\phi(\alpha_0)$, trovi $\alpha_1 = -\frac{b}{2a}$ e vedi se
 $\phi(\alpha_1)$ soddisfa nell'aggiornamento, se no ripeti.

Esempio applicato Brinko:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \sigma = \frac{1}{2}$$

$$d^0 = -\nabla f(x^0) \quad \left[\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix} \right]$$

⑥ $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Conr. $d^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ [stessa direzione, ma + semplice, ho associato il vettore]

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = x^0 + \alpha d^0 = \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$$

x^1 rispetta S.R. se $f(x^1) \leq f(x^0) + \gamma \nabla f(x^0)^T d^0$

In termini di α :

$$(2-\alpha)^2 + 2(1-\alpha)^2 \leq 6 + \frac{1}{2} (+4 + 4) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \alpha$$

[scelgo α ex $\gamma f(0,1) = \frac{1}{2}$]

Scelgo $\alpha^0 = 16$ [dimetto, scelgo pot. di 2]: Non scade.

Dimetto: $\alpha^1 = 8 + \text{no}$, $\alpha^2 = 4 + \text{no}$, $\alpha^3 = 2$ ho $2 \leq 6 - 8 = -2 + \text{no}$

$\alpha^4 = 1$ ho $1 \leq 6 - 4 + 51$

Il prossimo punto è $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ \rightarrow + comodo

$$d^1 = -\nabla f(x^1) = -\begin{pmatrix} 2x_1^1 \\ 4x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ prendo } d^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2) \leq f(x^1) + \gamma \alpha \nabla f(x^1)^T d^1; \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1-\alpha)^2 \leq 1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \underbrace{(2 \ 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{-2} \Rightarrow (1-\alpha)^2 \leq (1-\alpha)$$

Scelgo:

$$\alpha^0 = 4 \cdot 3 < 3 \text{ no}; \quad \alpha^1 = 2 \cdot 1 < -1 \text{ no}; \quad \underline{\alpha^2 = 1} \quad 0 \leq 0 \text{ si}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{PUNTO STATIONARIO (fortunato)}$$

line search: $f(x^k + \alpha d^k) = a\alpha^2 + b\alpha + c \Rightarrow$

[CON INTERPOLAZIONE]
min in $\alpha = -\frac{b}{2a}$ se $a > 0$

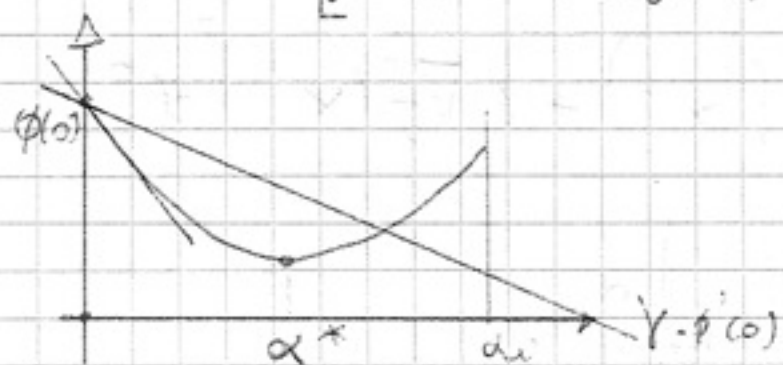
$$\phi(0) = f(x^k) = c$$

$$\phi(\alpha_i) = f(x^k + \alpha_i d^k) = a\alpha_i^2 +$$

$$\phi'(0) = \nabla f(x^k)^T d^k = b \quad b\alpha_i + c \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{f(x^k + \alpha_i d_i) - \nabla f(x^k)^T \alpha_i d_i - f(x^k)}{\alpha_i^2}$$

$$\min \alpha^* = \frac{-\nabla f(x^k)^T d_i}{[f(x^k + d_i d_i) - \nabla f(x^k)^T d_i d_i - f(x^k)] \cdot 2}$$



L'algoritmo:

- prova α_0

- se $f(x^k + \alpha_i d_i)$ soddisfa S.R. \Rightarrow

$\Delta_k = d_i$, altrimenti $\Delta_{k+1} = \alpha^*$

Interpolat. con i valori calcolati

Se non soddisfa S.R. $f(x^k + \alpha_i d_i) > f(x^k) + [\alpha_i \nabla f(x^k)^T d_i]$
(al posto $\alpha_i \leq$)

e quindi il num. di α è positivo:

$$\alpha > \frac{(\nabla f(x^k)^T d_i)}{\alpha_i^2} > 0 \quad (\text{angolo tra grad. e dir. di ricerca che è } > 90^\circ)$$

Anche qui l'ipotesi non è verificata, ma raramente.

$$\text{Es: } f(x) = x_1^2 + 2x_2^2; \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$d^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \text{scelgo } \alpha^0 = 4. \quad \text{Calcolo } f(x^0 + \alpha_0 d^0) =$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = 4 + 2 \cdot 9 = 22$$

$$\text{La suff. riduzione voleva che } 22 \leq f(x^0) + \alpha_0 \nabla f(x^0)^T d^0 =$$

$$= 4 + 2 + 4 \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -26; \quad \text{no, quindi prendo}$$

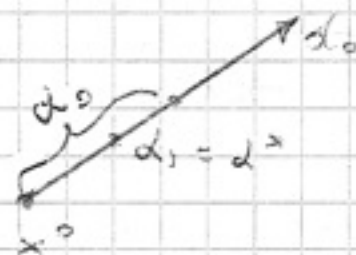
$$\alpha^* = \frac{-\alpha_0 \nabla f(x^0)^T d^0}{2[f(x^0) - \alpha_0 \nabla f(x^0)^T d^0 + f(x^0 + \alpha_0 d^0)]} = \frac{32 \cdot 4}{96} = \frac{4}{3}$$

Si è riuscito più della metà risp. a prima.

$$(68) \quad \alpha_1 = \frac{4}{3}$$

Iterations x trovare il punto]

$$f(x^0 + d, d^0) = \frac{6}{3} < -\frac{14}{3} + 10$$



METODO DI NEWTON PURO

- $x^0, k=0$

- while $\nabla f(x^k) \neq 0$

$$x^{k+1} = x^k + h^k$$

[con $h^k = \text{vedi nota}$]

Trovo insieme punto e direzione,
non posso scegliere il gradiente.

Approssimo la funzione con
una forma quadratica, Taylor

$$f(x_k + h) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x_k) h + \beta$$

La f. quadratica ha minimo se $\nabla^2 f(x_k)$ è def. pos.
Il min $f(x_k + h)$ si ha in h^* :

$$\nabla_x f(x_k + h) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k) h = 0$$

$$h^* = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$$

Rapidità di convergenza è QUADRATICA: molto I (min)
se Hessiana è def. pos. ha convergenza locale quadr.

Es: $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$; $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcola h^* . Sowie $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$ e $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\nabla^2 f(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ Quindi } h^* = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sono nel minimo}$$



NEWTON MODIFICATO

$$\nabla^2 f(x_k), \nabla f(x_k), h^* = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$$

Si aggiunge operazione. Se $\nabla f(x_k)^T \cdot h^* < 0$ allora la direzione h^* (e non come vettore) è giust. di ricerca.

Allora inizia line search con $dh = h^*$

Altrimenti prendo $dh = -\nabla f(x_k)$

Si dim. che è globalmente convergente e localmente con rapidità quadratica [lenta lontana, veloce vicino al minimo]

Inconveniente a calcolare Hessiana.

$$\text{Es. } \min_x f(x,y) \text{ con } f(x,y) = \max_y F(x,y)$$

Se ho punto no valore ma non so come è fatta.

È anche altri termini

— (fine P.N.L. non vincolata)

Es. trovare punti di min globale con Cond. 1° e 2° ordine

$$f(x) = x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2$$

[SIMIL-ESQUE]

$$\text{C.N. 1°) } \nabla f(x) = 0; \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 + 2x_2^2 \\ x_1^2 + 4x_1 x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2x_2(x_1 + x_2) = 0 \\ x_1(x_1 + 4x_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_1 = -4x_2 \end{matrix}, \text{ sempre } 0$$

$$\text{C.N. 2°) } \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 & 4x_1 \end{pmatrix}; \text{ sempre pos. (e nulla)}$$

Non so con certezza se sia minimo. Dov'è veloce se è il p.to di minimo.

È min globale se $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ [funzione è COERCEVA]

Se $x_1, x_2 < 0$ allora $f(x)$ va a $-\infty$.

Se $x_1 = -x_2$, $f(x) = +x_2^3 - 2x_2^3 = -x_2^3$

$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} -x_2^3 = -\infty \Rightarrow$ Funzione non ha punto di minimo

29/10/2007

PROGRAMMAZIONE NON LINEARE VINCOLATA

$$\min f(x)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n$$

\downarrow

Prima condizione $\nabla f(x) = 0$

[min $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$; se $\nabla f(x) \neq 0$,
 $d = -\nabla f(x)$ e \bar{x} non minimo]

Caratterizziamo insieme ammissibile

$$X := \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \begin{array}{l} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ con } h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } g(x) \geq \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} Ax = b \\ h(x) = Ax - b = 0 \\ \nabla(h) = A \end{array} \right]$$

Ip: h, g funzioni $\in C^1$

Si cerca di riportare il problema a caso non vincolato.
 Problema ausiliario.

$$\min f(x)$$

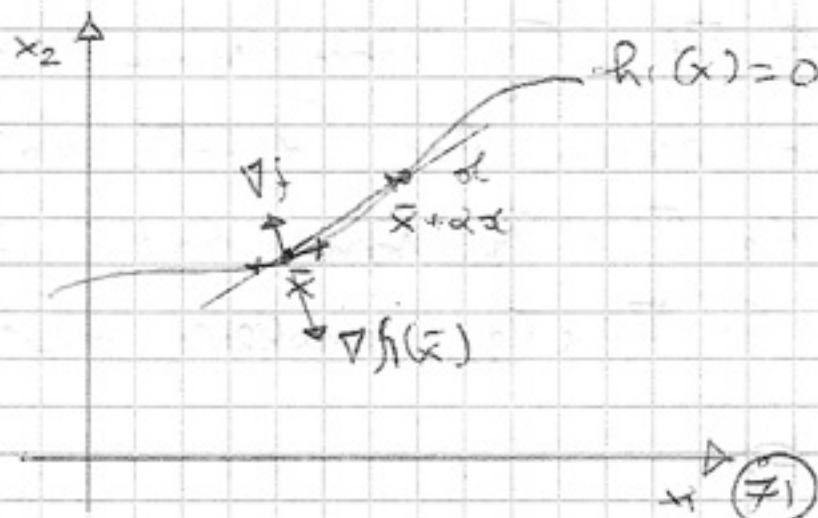
$$\begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ con 1 sola eq.}$$

$$\min f(x)$$

$$h_1(x) = 0$$

$h_1(x) = 0$ e inv. ammissibile.

Prendo punto e mi chiedo
 se è min locale. Se mi
 sposto lungo la dir. d . Vedo
 in $\bar{x} + \alpha d$



$x \in \mathbb{R}^n$

Approx. di Taylor come se localmente fosse lineare.

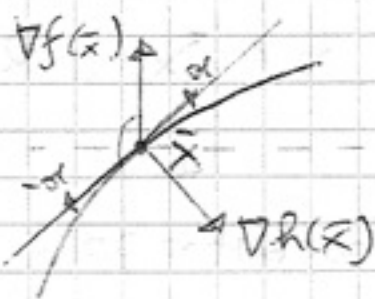
$$f(\bar{x}), f(\bar{x} + d) = f(\bar{x}) + d^T \nabla f(\bar{x}) + \beta_1 d \rightarrow \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\beta_1}{d} = 0$$

\Downarrow

\bar{x} è pto di min locale se $\nabla f(\bar{x})^T d > 0 \quad \forall d$ ammissibile \rightarrow diff. unip. a dt. non vincolata.

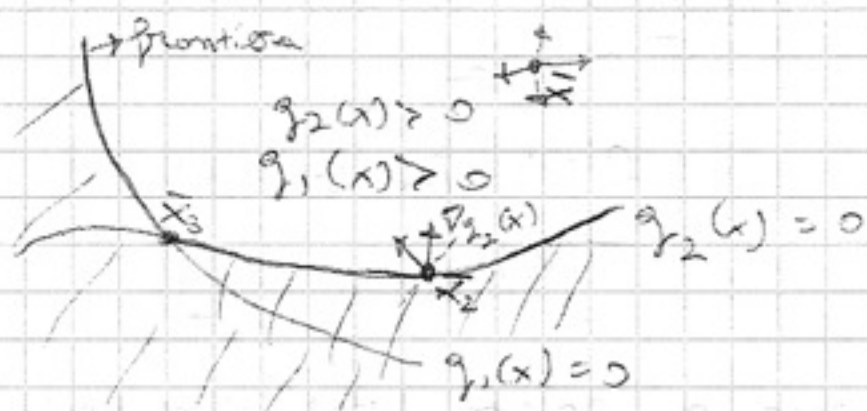
Nell'intorno di \bar{x} ho 2 dir. amm. (σ o x o rx), mi muovo lungo tg front. Quindi $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(\bar{x})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Es: qui \bar{x} non è minimo e $-d$ è dir. di discesa.



(necessaria di min locale: $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla h(x)$)

Con $\begin{cases} g_1(x) \geq 0 \\ g_2(x) \geq 0 \end{cases}$ [disuguaglianze]

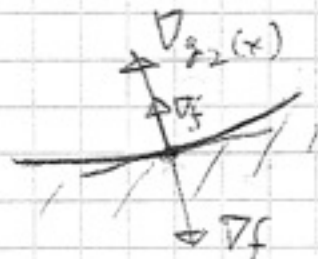


\bar{x} stabile ha tutte dir. ammissibili.] con $\langle \rangle$:

- all'interno di X
 \bar{x} è min locale se $\nabla f(\bar{x}) = 0$
- sulla frontiera:

$\nabla g_2(x)$ è \perp a curva nel punto e punta verso l'interno (verso il segmento). Il $\nabla f(\bar{x})$ se non è \parallel a $\nabla g_2(\bar{x})$ la curva non è min locale. Se fossero anti-

paralleli non va bene.

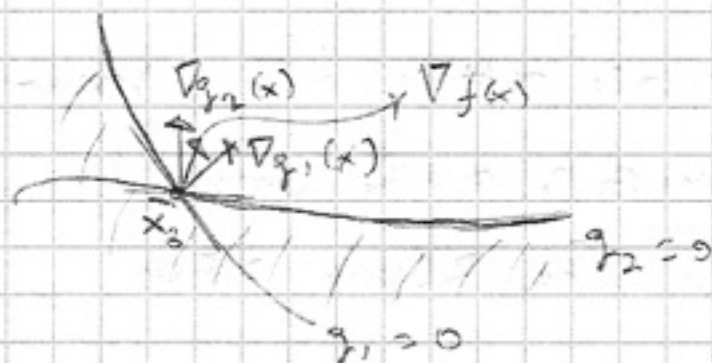


- Se ∇f e ∇g non sono \parallel o anti \parallel , \bar{x} non è min loc. ($d = -\nabla f$, \parallel a ∇g_2 , si discenderà quindi verso min)
- Se ∇f e ∇g sono anti \parallel , \bar{x} non è min loc.
- Se ∇f e ∇g paralleli, ovvero $\nabla f = \lambda \nabla g$ con $\lambda \geq 0$, \bar{x} è min. loc.

Def: $g_i(x)$ è ATTIVO in \bar{x} se $g_i(\bar{x}) = 0$

(nono quelli che contano)

Se è attivo + di 1 vincolo (\bar{x}_3):



- se ∇f va verso $////$, è antigradiente
punta verso interno e c'è dir. di
discesa.

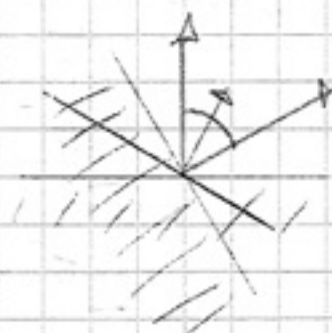
$\nabla f(x)$ delle stare tra $\nabla g_1(x)$ e $\nabla g_2(x)$

altrimenti o l'uno o l'altro vincolo mi vieta

Combinazione conica dei gradienti dei

vincoli attivi. (generalizzazione anche x_1

con precedenti):



$\nabla f(\bar{x})$ è coner. conica dei ∇ dei vincoli attivi

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \rightarrow [x \text{ } g_i(x) = 0 \text{ (v. attivo)} \lambda_i \geq 0 \text{ se non attivo} \\ \text{continguo } \lambda = 0 \text{ ed escluso quel termine}]$$

Condizione generale x tutti i vincoli con disuguaglianza

CONDIZIONI KKT (KARUSH KUHN TUCKER)

$$\text{Sia } L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x) \quad (\text{FUNZIONE LAGRANGIANA})$$

Se \bar{x} è punto di min. locale, allora:

$$\begin{cases} \nabla_x L(\bar{x}, \lambda) = 0 \\ \mu^T g(\bar{x}) = 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{ammonisce al th fond. della P.L.}$$

esprime ammin. del duale,

Cond. di ottimalità

$$\begin{cases} h(\bar{x}) = 0 \\ g(\bar{x}) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{punto ammin.} \rightarrow \text{esprime am. primale}$$

\bar{x} generalizzazione del th. di PL

↓

Ulteriore condizione:

"Se \bar{x} è REGOLARE"

Def:

" \bar{x} è REGOLARE se i gradienti dei vincoli attivi in \bar{x} sono linearmente indipendenti" esprimibile anche come:

"Se lo JACOBIANO dei vincoli attivi ha RANGO PIENO"

$$J(\bar{x}) = \left[\begin{array}{c} \nabla^T h_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla^T h_k(\bar{x}) \\ \nabla^T g_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla^T g_k(\bar{x})^T \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \text{reg.} \\ \text{disreg.} \end{array} \right.$$

Come trovare ILU. GLOB in PNL Vincolata?

Il candidato σ è punto di NON regolarità $\sigma \bar{x}$ che soddisfa KKT.

\exists min globale se:

- $f(x) \rightarrow \infty$ per $\|x\|_{\text{norm}} \rightarrow \infty$ [non può essere se X è limitato]

- $f(x) \in C^1$ su X chiuso e limitato

- $f(x) \rightarrow \infty$ su X chiuso per $\|x\|_{\text{norm}} \rightarrow \infty$

⇓

Se \exists min glob., \bar{x} è:

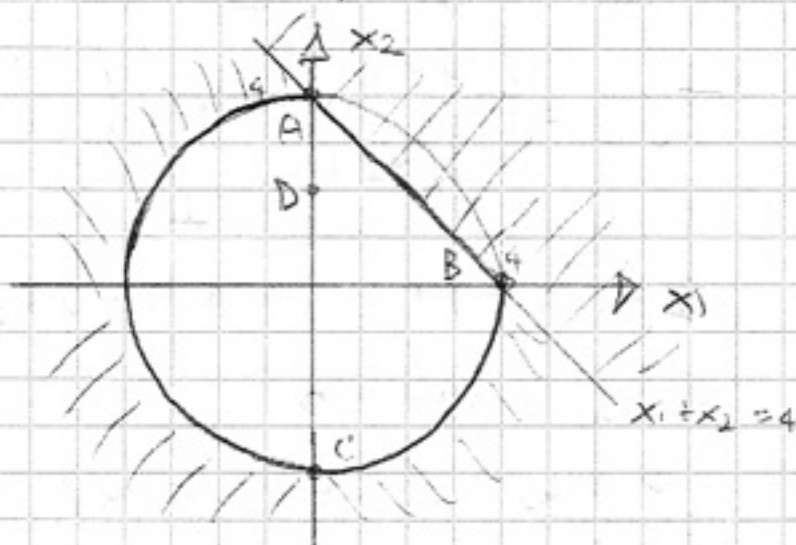
- punto di NON regolarità

- punto KKT

$$\text{Frx: } \min x_1^2 - (x_2 - 2)^2$$

Insieme ammissibile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \end{cases}$$



- Cond. regolarità; Standardiz.

Fiamo il problema:

$$g_1(x) = 4 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$g_2(x) = 16 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$\nabla g_1(x)^T = (-1 \quad -1) \quad , \quad \nabla g_2(x)^T = (-2x_1 \quad -2x_2) \quad \text{Quindi}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

\hookrightarrow nullo in origine, ma
(0,0) non è di non regolarità perché
non è attivo di g_2 .

Tutta la frontiera ha punti di regolarità. In A, B:

$$J(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad ; \quad J(B) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

ranko 2

ranko 2

Tutti i punti ^{sono} di regolarità.

- Cond. KKT:

Si scriviamo 4 casi:

• nessun vincolo attivo: $\mu_1 = \mu_2 = 0$

$$L(x, \mu) = x_1^2 - (x_2 - 2)^2 - \mu_1(4 - x_1 - x_2) - \mu_2(16 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\nabla_x L = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2(x_2 - 2) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{in} \quad \boxed{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}} \quad \text{Punti candidati}$$

- Attivo $g_1(x)$ (segmento A, B) [$\mu_2 = 0$]

$$\nabla_x L = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2(x_2-4) \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{con } \mu_1 \geq 0$$

\downarrow $x_1 + x_2 = 4$

$$\begin{cases} 2x_1 = -\mu_1 \rightarrow 8 - 2x_2 + \mu_1 = 0 \rightarrow x_2 = (8 + \mu_1)/2 \\ -2x_2 + 4 + \mu_1 = 0 \end{cases}$$

\downarrow $-2 \frac{8 + \mu_1}{2} + 4 + \mu_1 = 0$

\downarrow $\mu_1 = 0$

$x_1 + x_2 = 4 \rightarrow x_1 = 4 - x_2$

IMPOSSIBILE, no sol.

- attivo $g_2(x)$ (arco \widehat{AB}) [$\mu_1 = 0, \mu_2 \geq 0$]

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2(x_2-4) \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 16 \\ \mu_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2\mu_2 x_1 = 0 = 2x_1(1 + \mu_2) = 0 \\ -2x_2 + 4 + 2\mu_2 x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2(\mu_2 - 1) + 4 = 0 \\ x_2 = \pm 4 \end{cases}$$

\downarrow $x_1 = 0$

$$\mu_2 = \frac{2x_2 - 4}{2x_2} \rightarrow \mu_2 < \frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{matrix}$$

- attivi entrambi (punti A e B)

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2(x_2-4) \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 \geq 0 \end{matrix}$$

In A : $\begin{cases} 0 + \mu_1 = 0 \rightarrow \mu_1 = 0 \\ -4 + 8\mu_2 + \mu_1 = 0 \rightarrow \mu_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A \text{ soddisfa}}$

In B : $\begin{cases} 8 + 8\mu_2 + \mu_1 = 0 \\ 4 + \mu_2 = 0 \rightarrow \mu_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow B \text{ non la bene}$

3 candidati a min globale e no che $\exists (X \text{ lim})$

$f(x)$ calcolata nei 3 punti e vedo:

- in A: $f(x_1, x_2) = -4$

- in D: $f(x_1, x_2) = 0$

- in C: $f(x_1, x_2) = -36 \Rightarrow$ C è punto di min globale.

ALGORITMI PER PNL VINCOLATA

30/10/02

$$\min L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda^T h(x) - \mu^T g(x)$$

$$\mu \geq 0$$

$$\begin{cases} \mu^T g(x) = 0 \\ h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{nonose da trattare. Dobbiamo esaminare} \\ \begin{matrix} 2^k \text{ combinazioni} \\ \text{promemori dei } k \text{ vincoli attivi} \end{matrix} \quad (\text{se } \mu \in \mathbb{R}^n)$$

2 classi di algoritmi:

* funzioni di penalità: $F(x) = f(x) + \mu(h(x), g(x))$ [con
risorsa i vincoli con funzione di penalità μ]

$$P(h(x), g(x)) = 0 \text{ se } h(x) = 0, g(x) \geq 0$$

$$\lim P = +\infty \text{ se } h(x) \neq 0, g(x) < 0$$

Per comodità si usano solo $h(x)$ [+ efficaci]

Si ha allora $\mu(y)$ con $y = h(x)$. Es: $\mu(y) = y^T y$

(una specie di quadrato dei vincoli); nullo nell'interno;
ann.; se $f(x) \downarrow$ più o $\mu(y)$ il min lo trovo fuori.

Si aggiunge quindi $\alpha \cdot \mu(y)$ e trovo min.

- Se $h(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ è min $f(x)$ per $h(x) = 0$

- Se $h(x^*) \neq 0 \Rightarrow$ nuova ottimizzazione partendo da x^* con
 α più grande

si sposta il punto di minimo
verso una \downarrow di $h(x)$

genero sequenza rel. ottime $\phi_k \rightarrow$ alla
ammmissibilità.

Si risolve quindi

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(x) + \alpha p(h(x))$$

con α crescente gradualmente

quindi è algoritmo verso il ristretto dei vincoli

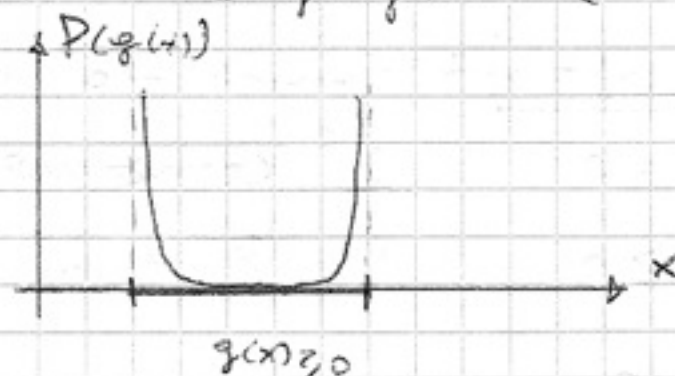
* funzioni di barriera

Funzionano soltanto con vincoli di disuguaglianza

$$F(x) = f(x) + \alpha \cdot p(q(x))$$

$$p(\cdot) = 0 \text{ se } q(x) > 0$$

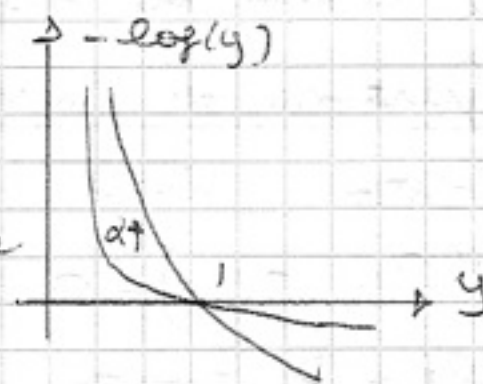
$$p(\cdot) \rightarrow +\infty \text{ se } q(x) \rightarrow 0$$



Quando mi avvicino alla
frontiera $\rightarrow +\infty$.

Si usa molto la f. logaritmica:

$-\log(q(x))$. Cresce moderatamente
all'interno.

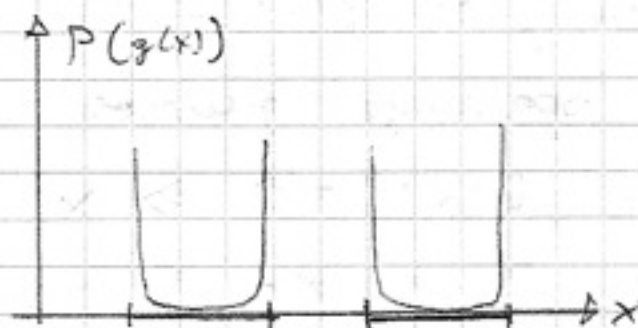


Si usa $-\log(\alpha \cdot q(x))$. Se α aumenta la log si accentua
genero una seq. di punti che al $\lim \rightarrow$ frontiera.

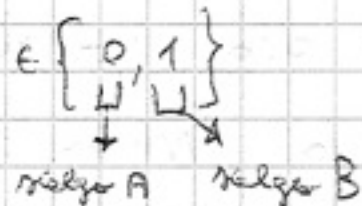


I limiti degli algoritmi sono nel caso di
insieme ammissibile SPEZZATO.

trovo il p.to di minimo in
uno degli intervalli, non posso
ancora nell'altro



Problema è in $f(x)$ se alcune variabili sono $x_i \in \{0, 1\}$
 Var. con insieme di valori discreto e X è
 disconnesso. Ho $\langle \rangle$ soluzioni.



Se ho poche regioni connesse posso fare tutti i casi,
 altrimenti conviene calcolare in 2^m componenti connesse con
 $m = n$ variabili intere.

Si usano metodi euristici, algoritmi generici che mi
 fanno esplorare solo poche k componenti; trovo k
 min locali e li confronto. Se è bravo ok, altrimenti rimetto
 e come se fosse casuale.

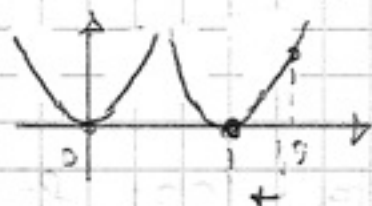
Penso usare il RISOLUTORE di EXCEL

Ex: $\min x$

$$x(x-1)=0 \quad [\text{int. amm. e } x=0 \text{ e } x=1] \quad \text{ovviamente } \min x=0$$

Se sto come punto iniziale $x=1,5$ (Non amm.) \rightarrow una
 le f di penalità.

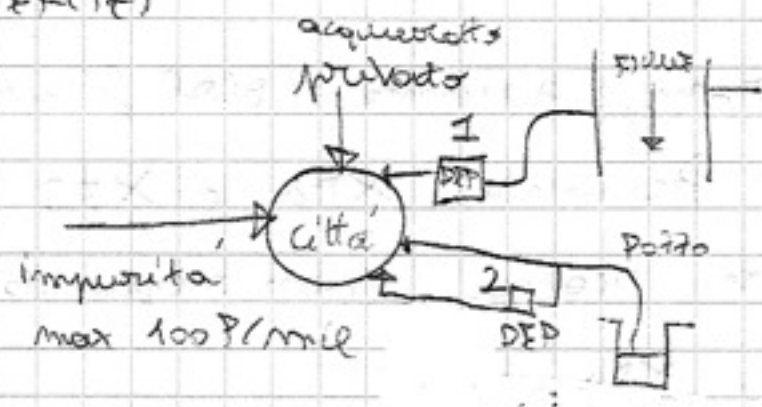
$$x^* = 1 !!$$



H (fine teoria)

ESERCIZI

1)



• Fiume da acqua in $q = \infty$.

Dep. fiume in modalità

A: 150 P/mile e $C = 1 \text{ €} / 1000 \text{ l}$

B: 75 P/mile e $C = 3 \text{ €} / 1000 \text{ l}$

e tratta al più 100.000 l/g

• Pozzo da max 20000 l/g

con acqua imp. 50 P/mile $[C]$ $[C = 2 \text{ €} / 1000 \text{ l}]$

• D. purificata con impianti sperim. massimo 50000 l/g
 e imp. = 10 P/mile. Pompage $C = (2 \text{ €} / 1000 \text{ l}) + (7 \text{ €} / 5000 \text{ l})$

Costo miscela: [€ / 1000 lt]

$$\frac{1 \cdot X_{FA} + 3 \cdot X_{FB} + 2 \cdot X_{P1} + \left(\frac{2+\frac{7}{5} = \frac{17}{5}}{5}\right) X_{P2}}{X_{FA} + X_{FB} + X_{P1} + X_{P2}} \leq \frac{12}{5}$$

Attenzione ai vincoli "imperfetti", ex. Kelgo variabile come frazione o percentuale, la nomina è 100.

2) Dovete assumere operai per risolvere diverse attività:

Attività	1. att. richieste	numero
A	3 ore/uomo	25 att/giorno
B	4 "	40 "
C	2 "	50 "

- ogni operaio deve risolvere per intero le attività assegnate in un giorno
- 2 tipi di contratto: tempo pieno [8 ore/giorno - c = 20€/h]
" parziale [6 " - c = 19€/h]

Quanti operai assumere x risolvere tutte le attività al costo minimo?

È problema di taglio ottimo.

Var: modalità di taglio:

$$8 \text{ ore} = 2A + C \quad \text{opp} \quad 1A + B \quad \text{opp} \quad A + 2C \quad \text{opp} \quad 2B \quad \text{opp} \quad B + 2C \quad \text{opp} \quad 4C$$

$x_1 \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad x_3 \quad \quad \quad x_4 \quad \quad \quad x_5 \quad \quad \quad x_6$

$x_{4,6}$: n. operai a tempo pieno con quella comp. di attività

$$6 \text{ ore} = 2A \quad \text{opp} \quad A + C \quad \text{opp} \quad B + C \quad \text{opp} \quad 3C$$

$x_7 \quad \quad \quad x_8 \quad \quad \quad x_9 \quad \quad \quad x_{10}$

$$\text{Min } 20 \cdot 8 \underset{[603]}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)} + 19 \cdot 6 \underset{[114]}{(x_7 + x_8 + x_9 + x_{10})}$$

La sempre il costo del modulo

Vincoli: mod. la domanda, cioè le attività

$$\begin{array}{l} A \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_7 + x_8 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + x_9 \end{cases} \\ B \begin{cases} x_1 + 2x_3 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} = 25 \\ = 40 \\ = 50 \end{array}$$

→ troppo restrittivi

Metti SEMPRE \geq (allarga X , cioè cerca costo minimo e se ad ex C fa 5) perché non prenderlo, al max fa 5 (im meno!)

Es:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x_1^2 + 6x_2^2} & \text{se } 0 \leq |x_2| \leq 2x_1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ -2x_1 \leq x_2 \leq 2x_1 \\ (-x_2 \leq 2x_1) \end{array} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + 4|x_2|) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Trovare punto limite con ∇ + line search esatta partendo da $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se $d = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(0 + \alpha d) = -\infty$$

$\alpha \rightarrow \infty$

(illim. inf.)

Per $x_2 = \pm 2x_1$:

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 \\ 3\sqrt{3}x_1 \end{cases} \rightarrow \text{lungo le semi-} \\ \text{la } f \text{ continua}$$

$$\nabla f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{6x_1}{2\sqrt{3x_1^2 + 6x_2^2}} \\ \frac{12x_2}{2\sqrt{3x_1^2 + 6x_2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} & \text{per } x_2 = \pm 2x_1 \\ \begin{pmatrix} \frac{6x_1}{6\sqrt{3}x_1} \\ \pm 4 \frac{2x_1}{6\sqrt{3}x_1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} & \text{per } x_2 \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{6x_1}{6\sqrt{3}x_1} \\ \pm 4 \frac{2x_1}{6\sqrt{3}x_1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} & \text{per } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

② $\nabla f(x)$ continuo quasi ovunque (non nulla

semiretta, semibre < 0 delle ascisse)

Origine non è min locale, diminuisce solo nel "cono"

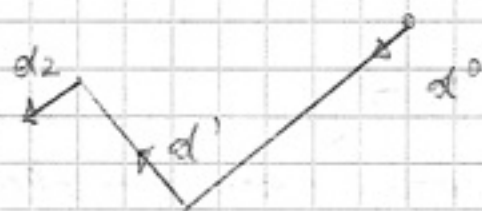
$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{12}{2\sqrt{18}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{18}} \\ \frac{1}{2\sqrt{18}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{18}} \end{pmatrix} \text{ scegli } d^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = \sqrt{3(2-\alpha)^2 + 6(1-\alpha)^2} \Rightarrow$$

$$\phi'(\alpha) = \frac{-6(2-\alpha) - 12(1-\alpha)}{2\sqrt{3(2-\alpha)^2 + 6(1-\alpha)^2}} = \frac{-24 + 18\alpha}{\sqrt{3(2-\alpha)^2 + 6(1-\alpha)^2}} = 0, \quad \alpha = \frac{4}{3} \text{ passo}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$d^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$



$$\phi(\alpha) = f(x^1 + \alpha d^1) = \sqrt{3\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3} + \alpha\right)^2} \Rightarrow$$

$$\phi'(\alpha) = \frac{-6\left(\frac{2}{3} - \alpha\right) + 12\left(-\frac{1}{3} + \alpha\right)}{\sqrt{3\left(\frac{2}{3} - \alpha\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3} + \alpha\right)^2}} = 0 \Rightarrow -4 + 6\alpha - 4 + 12\alpha = 0$$

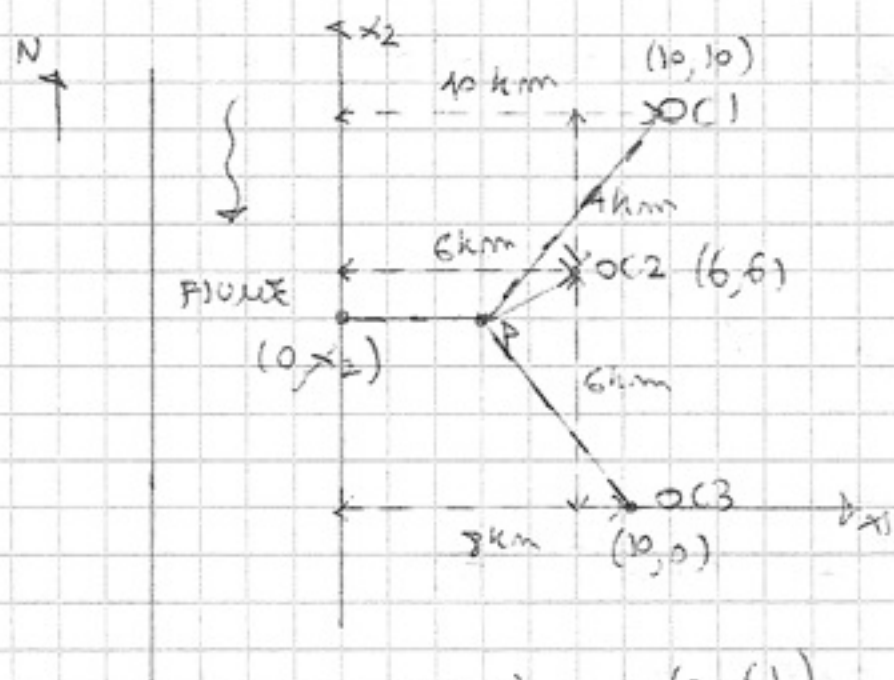
$$\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow x^2 = x^1 + \alpha d^1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}. \text{ Ripetendo ho } d^k = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}^{k-1} \text{ e } x^k = \begin{pmatrix} 2/3^k \\ (-1)^k \cdot \frac{1}{3^k} \end{pmatrix}$$

$$\text{Il punto lim. per } k \rightarrow \infty \text{ è } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tu non lo è in realtà, algoritmo non si accorge che la f. cambia definizione, lavora solo su 1° termine

Fx d' esame:



Costo: acqua sotto la fiume
a alta; comuni in convettano,
acq. comune.

Uglier acq. di L_{tot} MINIMA.
Devo trovare punto P su
biforcatione che aura costo
nel sist. sup x_1, x_2

$$F. ob.: \min x_1 + \sqrt{(x_1-10)^2 + (x_2-10)^2} + \sqrt{(x_1-6)^2 + (x_2-6)^2} + \sqrt{(x_1-8)^2 + x_2^2}$$

Vincoli

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \text{(potrei non vincolare)} \end{cases}$$

la posizione, tanto in a (corpe lui che soluzione non e' ottima)

Aggiungo | a x_1 . PNL non vincolata

Pero' | x_1 crea problema, considero x_1 e $g_1(x) = \begin{cases} x_1 \geq 0 \end{cases}$

$$L(x, \mu) = (x_1 + \sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}) - \mu(x_1)$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tutto } \mathbb{R}^n \text{ di regolarita'}$$

Distinguo:

$$\bullet x_1 = 0 \Rightarrow g_1(x) \text{ attivo}$$

$$\bullet x_1 > 0 \Rightarrow g_1(x) \text{ non attivo, } \mu = 0$$

$$\nabla L(x, \mu) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2(x_1-10)}{2\sqrt{(x_1-10)^2 + (x_2-10)^2}} + \frac{2(x_1-6)}{2\sqrt{(x_1-6)^2 + (x_2-6)^2}} + \frac{2(x_1-8)}{2\sqrt{(x_1-8)^2 + x_2^2}} \\ \frac{2(x_2-10)}{2\sqrt{(x_1-10)^2 + (x_2-10)^2}} + \frac{2(x_2-6)}{2\sqrt{(x_1-6)^2 + (x_2-6)^2}} + \frac{2x_2}{2\sqrt{(x_1-8)^2 + x_2^2}} \end{pmatrix} +$$

$$\textcircled{84} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• $g_1(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Ho:

$$\begin{cases} 1 + \frac{-10}{\sqrt{100+(x_2-10)^2}} + \frac{-6}{\sqrt{36+(x_2-6)^2}} + \frac{-8}{\sqrt{64+x_2^2}} - \mu = 0 \\ \frac{(x_2-10)}{\sqrt{100+(x_2-10)^2}} + \frac{x_2-6}{\sqrt{36+(x_2-6)^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{64+x_2^2}} = 0 \end{cases}$$

$\mu < 0$

$x_2 \left(\frac{1}{\sqrt{100+(x_2-10)^2}} \right)$ ecc ecc (min la somma dei \square delle lung.)

min $x_1^2 + (x_1-10)^2 + (x_2-10)^2 + (x_1-6)^2 + (x_2-6)^2 + (x_1-8)^2 + x_2^2$

Ho $\mu < 0$, ho PNL non vincolata (ovvio $x_1 > 0$)

(N 1° ord. $\begin{cases} 2x_1 + 2(x_1-10) + 2(x_1-6) + 2(x_1-8) = 0 \\ x_2-10 + x_2-6 + x_2 = 0 \end{cases}$

$x_1 = \frac{24}{4}, x_2 = \frac{16}{3}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e' def. pos. \Rightarrow

x e' min. globale

Ex: min $3x_1 - 4x_2$

Trova sol. ottima

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

con semplice.

$x_1 \geq 0, x_2$ libera

Porto in forma standard:

$x_2 = x_3 - x_4$ ($x_3, x_4 \geq 0$). Quindi

min $3x_1 - 4x_3 + 4x_4$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$x \geq 0$

Base iniziale x_5, x_6 , non serve fase 1. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e $x_5 = 3$
e le altre nulle
 $x_6 = 0$

F2: $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}$ $\bar{C}_1 = C_1 - u^T A_1 = 3 - (0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \geq 0$

$\bar{C}_3 = -4$, entra x_3

$\bar{A}_3 = B^{-1} A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ esce x_6

~~$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 & 12 \\ 1 & 3/2 & 12 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{array}$~~

$B = [x_5 \ x_3]$

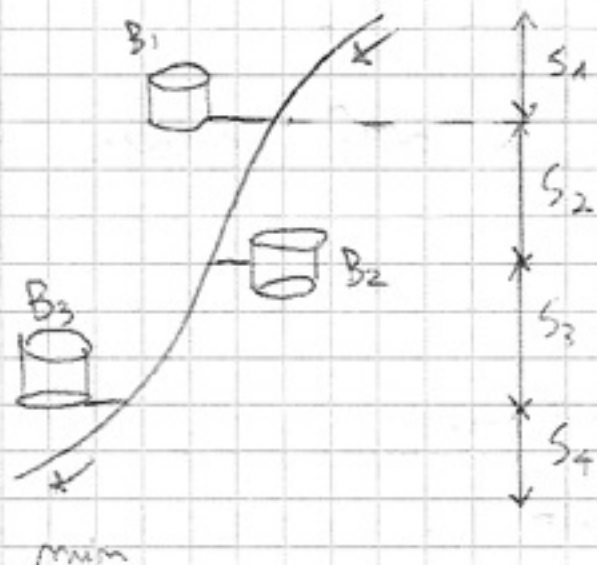
$\bar{C}_1 = 3 + (0 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{C}_4 = 4 + (0 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$\bar{C}_6 = 0 + (0 \ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_5^* = 12$, $x_3^* = 3$

Sol. ottima: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

For COMPITO D'ESAME

Aut 1mu Per Est 6/11/07



fiume

Aut 1mu Per Est 6/11/07

	B ₁	B ₂	B ₃
Dim.	5	2	3
H	20	15	12

1 Mag = 90 gg

max $\sum Q$ fiume in S_4 rispettando le capacità dei bacini.
Prob: def. Q nelle 3 sez. S_2, S_3, S_4 nelle 4 Regioni AIPR
(variabili: 12 ovvero x_{ij} con $i=2,3,4$ e $j=A, I, P, R$, attento
a n. di misura ex m^3/m ; \rightarrow quantità d'acqua nella
sez. S_i nella Regione j)

max min $\{x_{4A}, x_{4I}, x_{4P}, x_{4R}\}$

86

Vincoli:

$$\text{Secondo in Mag} = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 30 = F$$

In aut. non si deve riempire troppo, B.

$$\begin{cases} (400 - x_{25}) F \leq 20.8000.000 \\ (400 - x_{25}) F + (500 - x_{21}) F \leq 20.8000.000 \end{cases} \quad \text{anche in inverno}$$

$$(400 - x_{25}) F + (500 - x_{21}) F + (600 - x_{28}) F \leq 160.000.000$$

$$(400 - x_{25}) F + (500 - x_{21}) F + (600 - x_{28}) F + (200 - x_{28}) F \leq 160.000.000$$

Nella ser. non scade q. negativa

$$(x_{28} - x_{38}) F \leq 300.000.000$$

$$(x_{35} - x_{45}) F \leq 36.000.000$$

$$\text{Devo max min } \underbrace{\{x_{45}, x_{41}, x_{48}, x_{48}\}}_{\rightarrow Z}, \text{ ovvero}$$

max Z

$$\begin{cases} Z \leq x_{45} \\ Z \leq x_{41} \\ Z \leq x_{48} \\ Z \leq x_{48} \end{cases}$$

Prob. con 13 variabili e 16 vincoli
di P.L.

$$\text{Ex. max } x_1 + 2x_2$$

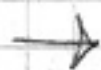
Risolvere

In f. standard:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

con

simplex.



$$\text{min } -x_1 - 2x_2$$

1) Trovare base ammissibile

cerco colonne I. Scelgo riga 2 dividendo per 2
(se voglio e prendo x_2). $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Devo costruire il

prob. artificiale

Aggiungo x_5

$$\min x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{cho } B = [x_5, x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Carry: $\begin{array}{c|c} -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 3/2 \end{array} \} \cdot u^T \Rightarrow [u^T = (B^T B^{-1} = [1 \dots 0])$

$$\bar{C}_1 = 0 + (-1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -1 \rightarrow \text{entra } x_1$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}; t = \arg\min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{3/2}{1/2} \right\} = 1, \text{ esce } x_5$$

$$\begin{array}{c|c} -1 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1/2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$B = [x_1, x_2]$$

Finita \mathbb{R}_1 , importo Carry per la 2

$$\begin{array}{c|c} 0 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline -1/2 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow u^T = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-z = -u^T a = (0 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_3 = 0 + (0 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1 \geq 0$$

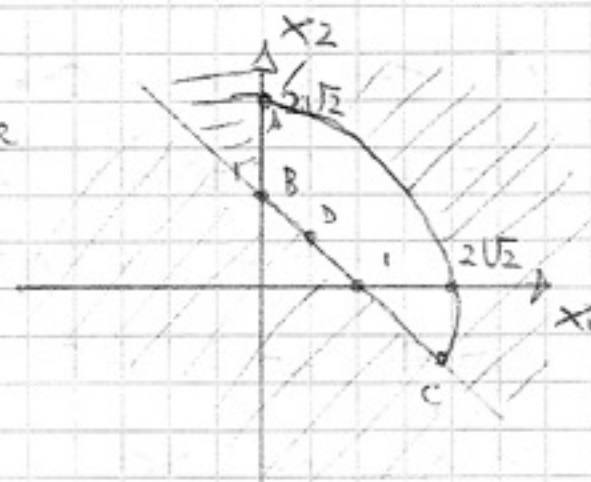
$$\bar{C}_4 = 0 + (0 \ 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1 \geq 0$$

Sol ottima: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3, x_4 = 0 \end{cases}$

$$\text{Ex: } \min x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 8 \end{cases}$$

Costruire graficamente
l'insieme amm.



] min globale (f conv. in Reg. limitata)

Conc cond. di qualificazione (o "regolarità"):

[PRIMO PASSO DA FARE: ritrovari all'inizio tutti i vincoli

Come $g(x) \geq 0$.

$$g_1 \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$g_2 \begin{cases} x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$$g_3 \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 + 8 \geq 0 \end{cases}$$

- Segmento AB: attivo g_2 $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- " BC: " g_1 $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- arco AC: " g_3 $\nabla g_3 = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$

- Punto A : attivi g_2 e g_3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$ [lin. indep.]

" B : " g_1 e g_2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ " "

" C : " g_1 e g_3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_{1c} \\ x_{2c} \end{pmatrix}$ " "

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 = 8 \end{cases} \rightarrow 2x_2^2 - 2x_2 - 7 = 0 \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{15}}{2}$$

Verificare condizioni

↓

- Condizioni KKT:

$$L(x, \mu) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - \mu_1(x_1 + x_2 - 1) - \mu_2(x_1) - \mu_3 g_3$$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_3 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

Verificare vincolo attivo ($\mu = 0$)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 0 & x_2 = -2x_1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 & x_1 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0$; origine è hKT ∇f non è ammissibile
 non è sulla frontiera:

- AB:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \mu_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = 0 \quad \text{ma non} \\ \text{nella inv. ammiss.}$$

- BC:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \mu_1 = 0 \rightarrow 2 - x_2 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - \mu_1 = 0 \rightarrow 1 + x_2 = \mu_1 \\ x_1 + x_2 = 1 \rightarrow 1 - x_2 = x_1 \end{cases} \quad D$$

$$\begin{matrix} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$\mu_1 = \frac{3}{2}$
 \rightarrow ammiss. e
 candidato

- AC:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2\mu_3 x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2\mu_3 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 8 \end{cases}$$

\rightarrow No ($\mu_3 < 0$)
 \rightarrow No (inv. ammiss.)

$$\mu_3 = \frac{\pm \sqrt{8 - x_2^2} + 2x_2}{2x_2} = \pm \sqrt{\frac{8 - x_2^2}{4x_2^2}}$$

- Punto A:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \mu_2 + 2\mu_3 x_1 = 0 \rightarrow \mu_2 = 2\sqrt{2} \\ x_1 + 2x_2 + 2\mu_3 x_2 = 0 \rightarrow \mu_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} < 0, \text{ non va bene} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

- Punto C:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \mu_2 + 2\mu_3 x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - \mu_1 + 2\mu_3 x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

$\mu_1 = \frac{1 - \sqrt{15}}{2} + 1 + \sqrt{15} > 0$
 $\mu_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15} > 0$
 $\mu_3 = \frac{1 - \sqrt{15} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{15}}{x_2} > 0$

C è hKT

- Punto B:

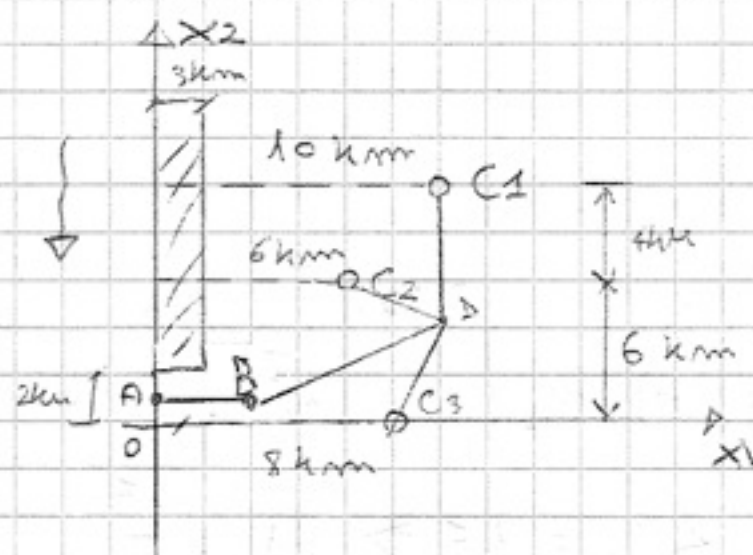
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - \mu_1 = 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 < 0 \rightarrow \text{NO} \end{matrix}$$

↓

Calcolo f nei punti candidati:

$$f(D) = 3/4; f(C) > f(D) \Rightarrow D \text{ è punto di min glob.}$$

Es: 9/11/07



Acquedotto con ostacoli

$$\min (A-B)^2 + (B-D)^2 + (D-C_1)^2 + (D-C_2)^2 + (D-C_3)^2$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \min (x_1^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}; C_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}; C_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (A-B)^2 & (B-D)^2 & (D-C_1)^2 & (D-C_2)^2 & (D-C_3)^2 \end{matrix} \\ &+ (y_1 - 6)^2 + (y_2 - 6)^2 + (y_1 - 10)^2 + (y_2 - 10)^2 + (y_1 - 8)^2 + y_2^2 \end{aligned}$$

Vincoli:

$$\begin{cases} x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Ottim. Vincolata con + di 2 var. interne non rappresentabile (e' regolare comunque)

Rinovo vincoli:

Punti di NON regolarità

$$\begin{cases} x_1 - 3 \geq 0 & g_1(x) \\ 2 - x_2 \geq 0 & g_2(x) \end{cases}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punti KKT:

1) attivo nessun vincolo

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2(y_1 - x_1) \\ -2(y_2 - x_2) \\ 2(y_1 - 6) + 2(y_1 - 10) + 2(y_1 - 8) \\ 2(y_2 - x_2) + 2(y_2 - 6) + 2(y_2 - 10) + 2y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$y_1 = 2x_1$$

$$y_2 = x_2 \rightarrow \frac{7}{2}y_1 = 24 \Rightarrow y_1 = \frac{48}{7}; x_1 = \frac{24}{7}$$

$$3y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = \frac{16}{3} = x_2 \text{ (Non ammette, } \frac{16}{3} > 2, \text{ viola 2' vinco.)}$$

2) attivo $g_1(x) \Rightarrow x_1 = 3$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2(y_1 - x_1) \\ -2(y_2 - x_2) \\ 2(y_1 - 6) + 2(y_1 - 10) + 2(y_1 - 8) \\ 2(y_2 - x_2) + 2(y_2 - 6) + 2(y_2 - 10) + 2y_2 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$12 - 2y_1 - \mu_1 = 0; y_2 = x_2; 4y_1 = 24 \Rightarrow y_1 = \frac{24}{4}$$

$$3y_2 = 16 \Rightarrow y_2 = \frac{16}{3}; 12 - \frac{24}{2} = \mu_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow \text{No, viola } \mu_1 \geq 0$$

3) attivo $g_2(x) \Rightarrow x_2 = 2$

$$\nabla L = \nabla f + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad y_1 = 2x_1 \quad -2y_2 + 4 + \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 2y_2 - 4$$

$$\frac{7}{2}y_1 = 24 \Rightarrow y_1 = \frac{48}{7}; x_1 = \frac{24}{7}$$

$$4y_2 = 18 \Rightarrow y_2 = \frac{9}{2} \text{ e } \mu_2 = 9 - 4 = 5 \geq 0$$

$x_1 \geq 3$
 ∇f KKT

$$\text{KKT} = \begin{pmatrix} 24/7 \\ 2 \\ 48/7 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

4) attiv. entrambe: $x_1 = 3; x_2 = 2$

$$\textcircled{92} \quad \nabla L = \nabla f + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$12 - 2y_1 - \mu_1 = 0 ; 2y_2 + 4 + \mu_2 = 0 ; 4y_1 - 27 = 0$$

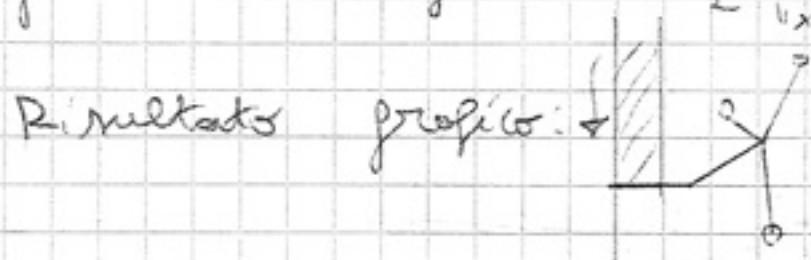
$$4y_2 - 18 = 0 \quad y_1 = 27/4$$

$$\rightarrow y_2 = \frac{9}{2}$$

$$\mu_1 = 12 - \frac{27}{2} < 0 \rightarrow \mu_0$$

Se \exists min globale, KKT trovato è l'unico.

f è coerciva! Sì! f' sempre ≥ 0 ammette per
forma min globale $[\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty]$



Ex: $\min 3x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_1$

- 1) Trovare punti stazionari
- 2) La funzione è coerciva?
- 3) Partendo da $x^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ determinare il punto di arrivo dopo 2 passi del metodo di Newton puro.

$$1- \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 x_2 + x_2^2 - 1 \\ 3x_1^2 + 2x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6x_1 x_2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2 + 2x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 (3x_1 + 2x_2) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = -\frac{2}{3} x_2 \end{cases}$$

Con $x_1 = 0$, $x_2 = \pm 1$ con $x_1 = -\frac{2}{3} x_2$, $-4x_2^2 + x_2^2 - 1 = 0 \rightarrow -3x_2^2 - 1 = 0$ No

Ho 2 punti: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($\Rightarrow f(x) = 0$)
Stazionari

2 - la f non è coerciva $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ quindi
 ho retta di valori $\begin{matrix} x_1 \rightarrow -\infty \\ x_2 \rightarrow -\infty \end{matrix}$ che stanno 0,
 i p. stat. non sono min globali \rightarrow basta che 1 var
 va a $-\infty$ e f a $-\infty$

$$3 - f(x^0 + h) = f(x^0) + \nabla f(x^0)^T h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x^0) h$$

\Downarrow

min
 arg h $f(x^0 + h) = h$ e h che annulla
 $\nabla f(x^0) + \nabla^2 f(x^0)^T h = 0$

quindi $h = -[\nabla^2 f(x^0)]^{-1} \cdot \nabla f(x^0)$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2 & 6x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

$$[\nabla^2 f(x)]^{-1} = \frac{1}{12x_1x_2 - (6x_1 + 2x_2)^2} \begin{pmatrix} 2x_1 & -(6x_1 + 2x_2) \\ -(6x_1 + 2x_2) & 6x_2 \end{pmatrix}$$

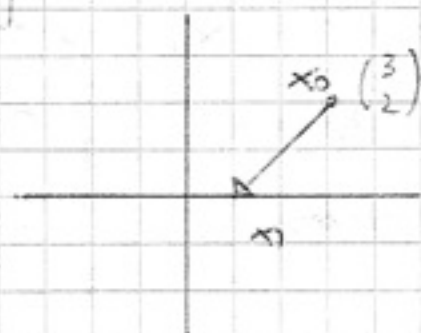
Con $x^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$h^0 = - \frac{1}{72 - (18 + 4)^2} \begin{pmatrix} 6 & -22 \\ -22 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 + 3 \\ 27 + 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{484 - 72} \begin{pmatrix} -16 \cdot 39 \\ -18 \cdot 39 \end{pmatrix} = \frac{39}{412} \begin{pmatrix} -16 \\ -18 \end{pmatrix} = h$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{39}{412} \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Passo 1: $x' = x^0 + h^0$



Il punto sulla parte giusta ma

(34) min è $-\infty$, va verso 0

Obiettivo completamente x^0 e nel 3° quadrante,
 cambia concavità funzione e analizziamo verso lo 0,
 cerchiamo il massimo.

Ex: $\min 3x_1 - 2x_2 - x_3$

$$u_1 \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$u_2$$

$$u_3$$

$$x_2 \leq 0; x_1 \geq 0; x_3 \text{ libera}$$

la sol $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' ottima

Sono dual, con ortogonalita da verificare. Dual:

$$\max 6u_1 + 3u_2$$

$$x \begin{cases} 4u_1 + u_2 + u_3 \leq 3 \\ 3u_1 + u_2 - u_3 \geq 2 \\ -2u_1 + u_2 = -1 \end{cases}$$

$$x_2$$

$$x_3$$

$$u_1 \text{ libera}$$

$$u_2 \text{ "}$$

$$u_3 \geq 0$$

Verso diseq. e'

completato da

segno Variabili

Poi con ortogonalita:

$$\begin{cases} u_1(4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 6) = 0 \\ u_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3) = 0 \\ u_3(x_1 - x_2) = 0 \end{cases}$$

$$u_1$$

$$u_2$$

$$u_3$$

$$x_1(4u_1 + u_2 + u_3 - 3) = 0$$

$$x_2(3u_1 + u_2 - u_3 - 2) = 0$$

$$x_3(-2u_1 + u_2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark \\ u_2 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark \\ u_3 \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{u_3 = 0} \end{cases}$$

$$2(4u_1 + u_2 + u_3 - 3) = 0$$

$$0(\cdot) = 0 \quad \checkmark$$

$$1(-2u_1 + u_2 + 1) = 0$$

[ho sostituito $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

$$\begin{cases} 2(4u_1 + u_2 - 3) = 0 \rightarrow 4u_1 + u_2 = 3 \\ -2u_1 + u_2 = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u_2 = 1/3 \\ u_1 = 2/3 \end{cases}$$

Verificare se u_3 è ammissibile e duale.

$$\frac{9}{3} \leq 3 \quad \checkmark$$

$$2 + \frac{1}{3} \geq 2 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \text{è ammissibile}$$

$$-\frac{4}{3} + \frac{1}{3} = -1 \quad \checkmark$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è l'ottimo}$$

$$u_3 \geq 0$$

Sono interessanti a diseg. con u_3 all'uguale:

$$x_1 - x_2 > 0 \Rightarrow u_3 = 0, \text{ a occhio si vede. Inutile}$$

prima parte c. ott.

Osservando che $x=0$ ha che $3u_1 + u_2 - u_3 = 2$ non che $= 0$.

$-2u_1 + u_2 \leq -1$ e $4u_1 + u_2 + u_3 \leq 3$ sono importanti all'uguale.

$$\begin{cases} 4u_1 + u_2 = 3 \\ -2u_1 + u_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4u_1 + u_2 = 3 \\ -2u_1 + u_2 = -1 \end{cases}$$

$$\min x_1 x_2 + x_2^2 - \frac{1}{x_1}$$

9/11/07

Partendo da $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ applico 1 passo del metodo del gradiente con Armijo (parametri $\alpha^{\text{in}} = 2 \cdot 5 = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{10}$)

Trovare x^1 e α^1 :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2 + \frac{1}{x_1^2} \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 2 + 1 = 3 \\ 1 + 4 = 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha \alpha^0) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = (1 - 3\alpha)(2 - 5\alpha) + (2 - 5\alpha)^2 - \frac{1}{1 - 3\alpha}$$

36) Condizioni di suff. soluzioni:

$$\phi(\alpha) \leq \phi(0) + \gamma \phi'(0) \alpha$$

$$\phi'(\alpha) = -3(2-5\alpha) - 5(1-3\alpha) - 10(2-5\alpha) - \frac{3}{(1-3\alpha)^2}$$

$$\phi'(0) = -6 - 5 - 20 - 3 = -34; \quad \phi(0) = 5$$

$\phi(\alpha) \leq 5 + \frac{-34}{100} \alpha$. Cerco $\phi(\alpha)$ con il metodo di Armijo.

$$\alpha^{IN} = 2 \rightarrow \phi(2) = (1-6)(2-10) + (2-10)^2 - \frac{1}{1-6} =$$

$$= 40 + 64 + \frac{1}{5} = 104 + \frac{1}{5} \leq 5 - \frac{34}{100} 2 \rightarrow \text{NO!}$$

Uno fatt. di contrazione

$$\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{3}{2}\right) \left(2 - \frac{5}{2}\right) + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \leq 5 - \frac{34}{100} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \text{SI} \Rightarrow \alpha^* = \frac{1}{2}$$

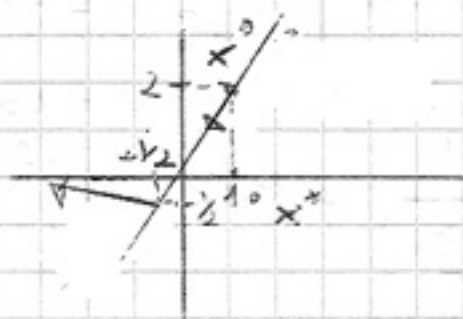
$$\text{Quindi } x' = x^0 + \alpha^* d^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Per } \alpha^1: \nabla f(x') = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 4 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow d^1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

[Ortogonalità esatta tra d^i e d^{i+1} si ha solo con line search esatta]

Punto stazionario:

$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{x_1^2} = 0 \Rightarrow x_2 + \frac{1}{4x_2^2} = 0 \Rightarrow x_2^3 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = -\sqrt[3]{1/4} \\ x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = +2\sqrt[3]{1/4} = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$



La dir. "scella" rimp. a x^* , cerca di andare a $x_1 < 0$ e $x_2 \rightarrow 0$.

Campionando, non mi sono accorto

che $x_1 = 0 \Rightarrow f$ non è definita. Per $x_1 < 0$ poi cambia segno. la forma di f porta a quella di disc. di disc. di disc.
Metodo del gradiente non bene con f non continue.

$$\min x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2^2 \quad \text{partendo da } x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix},$$

applicare 1 passo del metodo del gradiente con interpolazione. (Parametri: $\alpha^{IN} = 2$ e $\gamma = \frac{1}{100}$). Trovare x^1

↓
Come Armijo, solo che al posto di campionare punti fissi, prima viene α_{IN} ; se non rispettata suff. ord, α_{nuovo} non è fisso ma è andamento funzione. Ipotesi ed ex che $\phi(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$; quindi stima a, b, c con dati a disposizione $\{\phi(0), \phi'(0), \phi(\alpha^{IN})\}$

$$\phi(0) = c$$

$$\phi'(0) = b$$

$$\phi(\alpha^{IN}) = a\alpha_{IN}^2 + b\alpha_{IN} + c \rightarrow a = \frac{\phi(\alpha^{IN}) - \phi'(0)\alpha_{IN} - \phi(0)}{\alpha_{IN}^2}$$

Nuovo α è min ϕ : $\alpha^* = -\frac{b}{2a}$ quindi

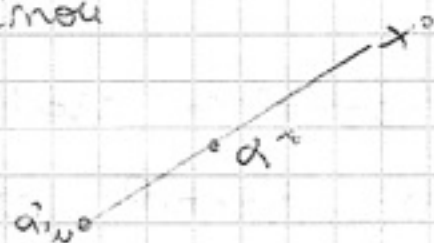
$$\alpha^* = -\frac{\phi'(0)\alpha_{IN}^2}{[\phi(\alpha^{IN}) - \phi'(0)\alpha_{IN} - \phi(0)]}, \text{ m.u.}$$

fermo fino ad α^* suff. piccolo.

Quindi dall'ex:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x_1^2} \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad d^0 = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{98} \quad \phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha d^0) = \left(2 - \frac{3}{4}\alpha\right) + \frac{1}{\left(2 - \frac{3}{4}\alpha\right)} + (10 - 20\alpha)^2$$



$$\phi'(\alpha) = -\frac{3}{4} + \frac{3/4}{(2 - \frac{3}{4}\alpha)^2} - 40(10 - 20\alpha)$$

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= -400 - \frac{9}{16} \quad ; \quad \phi(\alpha_{10}) = \phi(2) = \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{(2 - \frac{3}{2})} + 800 = \\ &= 902,5 \leq \underbrace{\phi(0)}_{\downarrow} + \gamma \alpha_{10} \phi'(0) = 102,5 + \frac{1}{100} \left[-400 - \frac{9}{16}\right] 2 \rightarrow 10 \\ \phi(0) &= 2 + \frac{1}{2} + 100 = 102,5\end{aligned}$$

Calcoliamo il nuovo α applicandolo α^* :

$$\alpha^* = - \frac{(-400 - \frac{9}{16}) \cdot 4^2}{\gamma [902,5 + (400 + \frac{9}{16})2 - 102,5]} = \frac{800 + 9/8}{800 + 800 + 9/8} \approx \frac{1}{2}$$

$$\phi(\alpha^*) = \left(2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2 - \frac{3}{8}} + \left(10 - 20 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{8} + \frac{8}{13} <$$

$$102,5 + \frac{1}{100} \left[-400 - \frac{9}{16}\right] \frac{1}{2} = 102,5 - 2 - \frac{9}{3200} \rightarrow \underline{51}$$

Quindi $\alpha^* = \frac{1}{2}$ e $x^1 = x^0 + \frac{1}{2} d^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3/4 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 13/8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [f(x^1) < 3, \text{ prima era } 102,5]$$

Stesso problema, ma:

$$\min x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2^2$$

Partendo da $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ applicare 1 passo del metodo di Newton modificato con passo di Armijo

$$\left(\gamma = \frac{1}{100}, \sigma = \frac{1}{4} \right)$$

f + Compilare la d .

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} +4 \frac{1}{x_1^3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \nabla^2 f(x^0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[\nabla^2 f(x^0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{\text{NEWTON}} = - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 20 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ e di discendere!}$$

$$\text{Devo fare: } \alpha^{\text{NT}} \cdot \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} -3/2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 20 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow \text{Sì, lo è!}$$

$$\text{e la direzione } \alpha^0 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\phi(\alpha^{\text{NT}}) = f(x^0 + \alpha^0) = f \begin{pmatrix} 2 - 3/2 \\ 10 - 10 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + 2 + 0 = \frac{5}{2}$$

$$f \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \underbrace{f \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}}_{f(x^0)} + \underbrace{\gamma \nabla f(x^0)^T \alpha^0}_{\phi'(0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{100}}_{\alpha_{\text{NT}}} =$$

$$\frac{5}{2} \leq 102,5 + \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 3/4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 \\ -10 \end{pmatrix} = 102,5 + \frac{9/8 + 200}{100} \rightarrow \text{Sì!}$$

$$\text{Quindi } x' = x^0 + \alpha^0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Piccola che $\phi(\alpha) = f(x^0 + \alpha \alpha^0)$, quindi:

$$\phi'(\alpha) = \nabla f(x^0 + \alpha \alpha^0)^T \alpha^0 \text{ e } \phi'(0) = \nabla f(x^0)^T \alpha^0$$

c. suff. ma: $\phi(\alpha) \leq \phi(0) + \gamma \phi'(0) \alpha$ oppure

$$f(x^0 + \alpha \alpha^0) \leq f(x^0) + \gamma \nabla f(x^0)^T \alpha^0 \alpha$$

Terreno di 4 ettari (40000 m^2) e capitale di 25000 €. Lavoro terra x 2 anni, poi rinnovo e torno in città con max capitale possibile.

Possò:

1) Coltivare grano: servono 5000 €/ettaro e dopo 1 anno incasso 10000 €/ett

2) Piantare alberi di albicocca: servono 20000 €/ettaro

100 Utile a 1 anno: 4000 €/ett, a 2 anni 8000 €/ettaro

- 1 ettaro di terreno incolto \rightarrow vende a 8000 €
- " " " " alberato " " " 10000 €

Possiamo come 3° possibilità investire soldi al 5% annuo.



Ammoniglia od alloc. risorse.

Ho 6 possibilità (3 x 2 anni) che consumano 4 risorse (terreno e capitale nei 2 anni)

Analizzo:

	Consumo (1 anno)	Prodotto (fine 1 anno)
1)	<ul style="list-style-type: none"> • 5000 €/ett • 1 ett/ett 	<ul style="list-style-type: none"> • 19000 €/ettaro • 1 ettaro/ettaro \rightarrow lo rende di mp.
4)	lo stesso nel 2° anno	
2)	<ul style="list-style-type: none"> • 20000 €/ett • 1 ett/ett 	<ul style="list-style-type: none"> • 4000 €/ettaro
5)	lo stesso nel 2° anno	
3)	• 1 €	• 1,05 €
6)	" " " " "	(investibile nei nuovi consumi)



Variabili: $X_i = \text{€ investiti in } i$ [inv. 0 non conviene]

$$\max \quad 2 \overset{[\text{primo}]}{X_1} + \left(\overset{\substack{\rightarrow \text{vendita albi (colta)}}}{\frac{2}{5}} + \underset{\substack{\rightarrow \text{extra profitto su terreno}}}{1} \right) X_2 + \left(\overset{1}{\frac{1}{5}} + 1 \right) X_5 + 1,05 X_6$$

Vincoli:

$$\frac{X_1}{5000} + \frac{X_2}{20000} \leq 4$$

$$\frac{x_4}{5000} + \frac{x_2}{20000} + \frac{x_5}{20000} \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 25000$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 1,05 x_3 + 2x_1 + \frac{1}{5} x_3$$

[FINE CORSO 3/11/07]